

CAPÍTULO 4: Libros de texto de Análisis Matemático en la Educación Secundaria en España

INTRODUCCIÓN.

A lo largo de este capítulo se irán analizando cada uno de los libros de texto que se han seleccionado correspondientes a la Enseñanza Secundaria en España desde que se empezó a incluir el Análisis Matemático en los programas oficiales de enseñanza. Anteriormente, el cálculo diferencial se había incluido en las enseñanzas que los jesuitas establecieron en su *Ratio Studiorum*, que era un manual práctico de reglamento interno de las disciplinas académicas, preparado para servir de guía a los profesores. Aunque la primera versión de la *Ratio* del padre Acquaviva es de 1599, no es hasta el año 1832 con la *Ratio* del Padre Pachtler cuando se amplía el programa de matemáticas y se incluyen el álgebra, la trigonometría, la geometría analítica y el Cálculo Diferencial e Integral (Labrador y otros, 1986). Resultaba, por lo tanto, ciertamente ambicioso el plan establecido por los jesuitas así como novedoso y precursor de lo que empezaría a implantarse en España un siglo después. De todas formas, nosotros sólo vamos a dedicar este capítulo a las enseñanzas regladas establecidas en España durante el siglo XX.

Los libros, como se ha señalado en el capítulo 2, se han dividido en cuatro periodos, que corresponden a los diversos planes de estudio que ha habido en España desde el año 1934, teniendo en cuenta que el primer periodo abarca varios de estos planes por la similitud que se ha observado entre ellos. La estructura de cada periodo es similar, en primer lugar se hace una revisión del momento al que corresponde y se exponen las orientaciones oficiales que se establecieron en relación con dicho periodo, para poder analizar los libros, a la luz de dichas consideraciones. Posteriormente, se hace una revisión de las representaciones utilizadas en los libros, empezando por las descripciones, continuando con las tablas y gráficas, y finalizando con las expresiones simbólicas. Cada una de las unidades de información seleccionadas, están numeradas según el orden de aparición en este texto, y codificados atendiendo a las categorías previamente establecidas. Dichas unidades son analizadas según categorías sintácticas, semánticas, pragmático-didácticas y socio-culturales, de forma que a cada unidad didáctica le corresponden cuatro

códigos, según esas cuatro categorías. Los códigos se registran en una tabla para cada uno de los sistemas simbólicos de representación que han sido considerados, así en la primera columna vertical se enumeran las unidades de información y en las columnas siguientes se le hacen corresponder los códigos correspondientes, que a su vez, se hacen corresponder con el libro o los libros de los que ha sido entresacada dicha unidad. Aquellas unidades que presentan los mismos códigos y pertenecen a los mismos libros, se agrupan en una misma cuadrícula para favorecer la imagen visual de cada uno de los libros y permitir identificar más claramente las características que se le han atribuido. Las tablas correspondientes a las descripciones están divididas en dos bloques, uno correspondiente a los problemas, y otro a las descripciones de tipo teórico, como las definiciones, las reglas o los teoremas. Finalmente, para establecer el perfil de cada uno de los libros, se realiza una lectura en vertical de cada una de las tablas, asignando un carácter a cada dimensión, que posteriormente se registra en el perfil del libro y que nos permite clasificarlos en expositivos, tecnológicos o comprensivos.

4.1.- Desde la inclusión del Análisis Matemático en la Educación Secundaria hasta la Introducción de la matemática moderna en los Institutos de Bachillerato: 1934-1967.

Este periodo abarca desde la terminación de la Guerra Civil hasta el año 1967 en que se publican los textos piloto de la “matemática moderna”, destacándose en él dos partes bien diferenciadas determinadas, la primera por la publicación en los años 1934 y 1938 de sendos planes de estudio y la segunda por el plan de 1953 que se modifica ligeramente en 1957.

4.1.1.- Planes de estudio y libros desde 1934 hasta 1967.

En 1934 se inicia una reforma del bachillerato siendo ministro de Instrucción Pública Filiberto Villalobos. El plan Villalobos estructura el bachillerato en siete años, siendo los tres primeros (primer ciclo) de enseñanza general y los cuatro siguientes (segundo ciclo) de enseñanza superior, divididos en dos ciclos de dos grados: el primero comprendería disciplinas eminentemente formativas, y el segundo se dedicaría a profundizar en las disciplinas. No se hace distinción entre ciencias y letras, y las matemáticas constituyen una asignatura obligatoria en todos los cursos, estableciéndose tres horas en todos ellos, excepto en tercero, que son cuatro e introduciéndose en los cursos 6º y 7º por primera vez la Geometría Analítica y el Análisis Matemático, así como algunas nociones relativas a los números complejos. En cuanto a los contenidos relativos al Análisis Matemático se organizan de la siguiente forma:

SEXTO AÑO

Aritmética y álgebra

Revisión del concepto de número real. Representación geométrica; postulado de continuidad. Definición de las operaciones con números reales.

Operaciones con potencias de exponente fraccionario.

Límite de una sucesión de números reales. Límites de las sucesiones formadas con la suma, producto y cociente de los términos de otras dos. Formas simbólicas de las fracciones.

Función exponencial. Representación gráfica y propiedades.
 Función logarítmica. Representación gráfica y propiedades.
 ...
 Ejercicios y problemas sobre las materias de los cuestionarios de los años quinto y sexto.

SÉPTIMO AÑO

Análisis

Continuidad de funciones.
 Derivada y diferencial. Representación geométrica. Significación física; velocidad.
 Derivación de las funciones algebraicas.
 Derivadas sucesivas. Aceleración.
 Máximos y mínimos de una función. Aplicación a la determinación de máximos y mínimos en problemas de Geometría y de Física. Aplicación de las derivadas al estudio de algunas funciones sencillas.
 Derivadas de las funciones seno, coseno, tangente y cotangente.
 Derivadas de las funciones logarítmica y exponencial. El número e . Logaritmos neperianos. Paso de un sistema de logaritmos a otro. La función ϕ y su significado en física.
 Integración de las funciones enteras. Aplicación al cálculo de áreas y volúmenes.
 Indicaciones sobre el origen histórico del cálculo infinitesimal.
 Ejercicios y problemas sobre las materias del cuestionario, especialmente sobre aplicaciones a la Física y a la Geometría.

Gaceta de Madrid (21 octubre 1934)

Posteriormente, el gobierno de Franco siendo ministro Sainz Rodríguez, preparó un Plan en el año 1938, que tendría vigencia durante la Posguerra. Este plan organizaba los estudios de Bachillerato en siete cursos, manteniendo de esta forma la estructura del plan de 1934, estableció un Examen de Estado al finalizar el mismo, reguló la edición de libros de texto, y estimuló la iniciativa privada para la creación de centros de enseñanza. Ideológicamente, estaba dedicado a exaltar los valores religiosos, patrióticos y conservadores, prevaleciendo los aspectos formativos y de orientación ideológica y política sobre los instrumentales y los utilitarios. También trataba de aunar los aspectos humanísticos y científicos en un solo tipo de Bachillerato. La asignatura de Matemáticas formaba parte de los programas de los siete cursos de Bachillerato, y se desarrollaba sobre un esquema cíclico, de tal forma que los contenidos se amplían y completan en sucesivos cursos. En la distribución de materias según el Boletín Oficial de 23 de septiembre no aparece explícitamente Cálculo Diferencial e Integral, aunque la costumbre de la época fue introducir esta parte en los contenidos de Álgebra o de Álgebra Superior.

En 1953 (B.O.E. de 2 de julio) se establece un nuevo plan de estudios para el Bachillerato. La nueva organización rompe el carácter unitario que hasta entonces había tenido. Sus características fundamentales son:

- Seis cursos de duración, siendo los cuatro primeros comunes (bachillerato elemental) y los dos últimos (bachillerato superior) divididos en dos especialidades denominadas: Ciencias y Letras.
- Instauración de un examen de carácter nacional, denominado reválida, al final de cada bachillerato.

- Establecimiento de un curso puente con los estudios superiores, denominado preuniversitario, cuya organización y evaluación era compartida con la Universidad.

La asignatura de Matemáticas es obligatoria en el Bachillerato Elemental y en la especialidad de Ciencias del Bachillerato Superior. Los conceptos relativos al bloque de Análisis aparecen en los cuestionarios (programas) de sexto curso, aunque no todos los libros de texto desarrollan completamente los contenidos especificados:

SEXTO CURSO

Análisis- Operaciones con números reales. Límite de una sucesión de números reales. Infinitésimos. Cálculo de límites.
El número e.
Número complejo- Representación gráfica. Adición y sustracción de números complejos. Expresión trigonométrica de los números complejos. Producto y cociente de números complejos.
Estudio completo de la ecuación de segundo grado.
Estudio analítico de la recta- Problemas de intersección, paralelismo y perpendicularidad. Derivada y diferencial.- Interpretaciones geométrica y mecánica. Derivadas sucesivas. Derivación de las funciones algebraicas. Derivadas de las funciones trigonométricas directas. Derivadas de las funciones logarítmica y exponencial. Derivación logarítmica. Ecuación de la tangente a una curva en un punto. Máximos y mínimos. Concavidad y convexidad y puntos de inflexión (B.O.E. 10 de febrero de 1954)

Al final de los cuestionarios, aparecen unas orientaciones metodológicas para cada uno de los cursos, limitándose en lo que se refiere al Análisis, a afirmar que se consideraba necesario introducir nociones de cálculo infinitesimal en el Bachillerato, siendo las únicas consideraciones en relación con esta rama de las Matemáticas que:

Un apartado especial se dedica al número e, sin el que no es posible dar un paso en esta rama de las Matemáticas. (B.O.E. 10 de febrero de 1954)

Este plan de estudios fue modificado en el año 1957 (O. M. De 31 de Mayo de 1957) corrigiendo algunos fallos organizativos, pero sin presentar cambios fundamentales.

Los libros seleccionados en relación con este periodo corresponden a dos grupos:

- Un primer bloque formado por aquellos libros que utilizan el lenguaje de variables en relación con los contenidos propios del Análisis. Dentro de este bloque hemos analizado el libro:

Autor: Manuel Fernández de Castro y José Luis Jiménez Jiménez.

Título: Matemáticas. Tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo. Preparación del examen de estado.

Año, editorial y lugar de la edición consultada: Anterior a 1955, Escalicer, S.L. Cádiz-Madrid.

Localización del manual: Antonio Molpeceres.

En este libro (Fernández y Jiménez) los conceptos tienen un carácter esencialmente instrumental, ya que lo que se pretende es:

Determinar los puntos en los cuales hay máximos o mínimos. Vamos a dar el procedimiento para llegar a determinarlos en las funciones más sencillas. (JJ y FC, p. 479).

Es una especie de enciclopedia de matemáticas en el que se tratan los contenidos referentes a varios cursos de Bachillerato. El esquema del libro sugiere que el tratamiento de los contenidos se plantea de forma cíclica, ya que se repiten en sucesivos cursos, ampliándose y completándose en cada uno respecto del anterior. El desarrollo es secuencial y formal, aunque las demostraciones no son totalmente rigurosas, sino que poseen ciertas componentes intuitivas. La idea que subyace es la de una matemática ya hecha, que el alumno debe memorizar y practicar, resolviendo ejercicios, de tal forma que incluso los ejemplos son propios de la matemática, sin ninguna referencia a posibles aplicaciones a situaciones habituales o relativas a otras ciencias.

- Un segundo bloque lo constituyen libros que utilizan de forma explícita el lenguaje de funciones, algunos son de los primeros planes de estudio y otros, aunque fueron publicados con posterioridad, siguieron utilizándose bajo las indicaciones de los programas de los planes de estudio de estos periodos. Dentro de este grupo hemos elegido los libros:

Autor: Benigno Baratech Montes y Jose M^a Royo Villanova Morales.

Título: Matemáticas para el séptimo curso.

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1939, Librería General Zaragoza.

Localización del manual: Biblioteca pública de Zamora M 611.

Autor: Emilio Pérez Carranza.

Título: Matemáticas. Sexto curso. Bachillerato. Plan 1957.

Año. Editorial y lugar de la edición consultada: 1972, Editorial Summa, Madrid.

Localización del manual: Biblioteca personal.

Estos libros utilizan el lenguaje de funciones de forma explícita, sin hacer referencia a las variables, con lo cual el concepto de función va adquiriendo cierto status que no poseía en los libros de texto hasta ese momento. Los autores se limitan a definir los conceptos y apenas hay demostraciones, sino simples comprobaciones. A pesar de ello, tanto las definiciones como las reglas de cálculo o los algoritmos van siendo guiados durante la exposición de la lección, de tal forma que se obtienen de una forma casi deductiva. La noción de matemática que se muestra, como en el libro anterior, es de una matemática ya hecha, que sólo hay que memorizar. De todas formas algunos ejercicios hacen referencias a otras ciencias como la Física, o situaciones de tipo real como aplicación de los contenidos trabajados en la lección.

4.1.2.- Descripciones

4.1.2.1.- Descripción de fenómenos físicos.

La gran mayoría de los problemas y ejercicios provienen de los libros de Baratech y Royo, y en el de Carranza, mientras que en el de Fernández y Jiménez sólo hay algunos ejemplos. Los problemas que se refieren a fenómenos no matemáticos son muy escasos, de forma que, no hay ninguno relativo a situaciones cotidianas ni a recorridos mínimos, en cambio si los hay en relación con fenómenos físicos, en particular los siguientes problemas pertenecen a este bloque y están relacionados; el primero con la intensidad luminosa, el segundo con la refracción de la luz, el tercero con la resistencia de una viga y el último hace referencia a la clásica utilización en relación con la velocidad y la aceleración. Cada uno de ellos está en alguno de los libros consultados para analizar este periodo, de forma que en todos ellos se consideran este tipo de situaciones en relación con los puntos críticos.

d1: Un foco luminoso de 64 bujías, se halla a 7 metros de otro de 27 bujías. ¿Cuál es el punto de la línea que los une, en el que la iluminación sea mínima? (Fernández y Jiménez, p. 484).

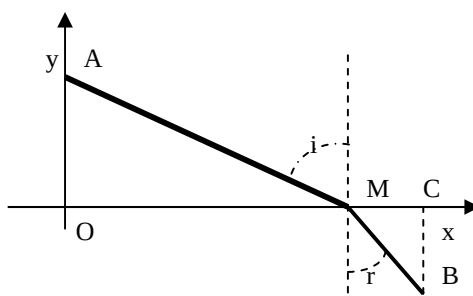
En el problema anterior hay que identificar la función que determina la luminosidad existente entre dos focos que distan una cantidad dada, se trata de una función racional $i = \frac{64}{d^2} + \frac{27}{(7-d)^2}$ para la que se solicita la búsqueda de un punto mínimo. Las unidades de

medida utilizadas en relación con el fenómeno físico descrito son la bujía y la candela¹, unidades actualmente en desuso pero correspondientes a la época en la que fue escrito el libro. Este problema no se ha encontrado en ninguno de los demás libros analizados del resto de los periodos, por lo que podemos considerarlo indicativo de esta época y del tipo de aplicaciones que se consideraban de utilidad.

El problema siguiente referido a la refracción de la luz, ya lo hemos visto al hacer el análisis de los libros históricos de texto, es uno de los problemas que se han incluido en numerosos manuales al considerar los conceptos relativos a los máximos y los mínimos, podemos decir que es un problema clásico entre los relacionados con la optimización.

d2: Se supone que un plano está descompuesto por una recta en dos semiplanos, que son dos medios homogéneos en los que las velocidades respectivas de la luz son v_1 y v_2 .

Encontrar el camino que debe seguir un rayo luminoso para ir en el menor tiempo



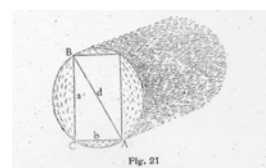
¹ **Bujía decimal:** antigua unidad de intensidad luminosa reemplazada actualmente por la candela. **Candela:** unidad de medida de intensidad luminosa, equivalente a la intensidad luminosa en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertzios y cuya intensidad energética en esa dirección es igual a $1/683$ vatios por estereorradián.

posible (camino óptico) desde un punto A, situado en uno de los medios, a otro B situado en el otro medio. (Carranza, p.121).

La formulación de este problema, se puede encuadrar dentro de los problemas de tipo físico, pero no se aportan datos concretos acerca de las velocidades, los medios en los que se desplaza la luz, los puntos entre los que se mueve. Aunque el planteamiento de dicho problema puede ser asequible, la solución está fuera del alcance de los alumnos, puesto que la derivada resulta ser una función de cuarto grado y la ecuación que surge de ella no puede ser resuelta por los alumnos con las herramientas matemáticas que se le han proporcionado hasta el momento. Se puede considerar que este problema no se presenta para practicar las reglas de cálculo aprendidas durante la lección, sino que se presenta como ejemplo de aplicaciones prácticas del cálculo de máximos y mínimos. Se acompaña el enunciado con un gráfico que esquematiza la situación planteada. Dicho gráfico se sitúa sobre un plano cartesiano para traducir las relaciones geométricas existentes al lenguaje algebraico.

Otro problema que se incluye dentro del bloque relacionado con los fenómenos físicos es el siguiente relativo a la resistencia de una viga. Este problema se ha encontrado en los sucesivos periodos considerados, por lo que podemos considerarlo como un problema-tipo de optimización,

d3: Transformar un tronco de árbol en viga de sección rectangular, presentando la máxima resistencia a la flexión. (Baratech y Royo, p. 136).



El problema tal como se plantea, debido a la fórmula de la resistencia a la flexión, se reduce a otro de tipo geométrico o aritmético: *inscribir en el círculo sección del árbol, un rectángulo de dimensiones a y b tales que el producto $y=ba^2$ sea máximo*. Para resolverlo se aplica el teorema de Pitágoras y resulta una función cúbica, de la que se obtienen dos puntos críticos uno positivo y otro negativo (que por lo tanto no tiene sentido al referirse a una magnitud). La relación que se establece entre las dos dimensiones del rectángulo viene determinada por la magnitud irracional $\sqrt{2}$, es decir $a=b\sqrt{2}$. En el mismo libro se da una interpretación de la solución a situaciones cotidianas en las que dicha solución se sustituye por otras más manejables o más fácilmente construibles (hipotéticamente), ya que se incluye la siguiente nota:

Prácticamente, el valor $\sqrt{2}$ se sustituye por $\frac{7}{5}$ o por $\frac{10}{7}$ que son las relaciones que usualmente dan los obreros a las dimensiones de altura y base de la viga. (Baratech y Royo, p. 137).

También se plantean los clásicos problemas relacionados con la velocidad y la aceleración y en particular con el lanzamiento de un proyectil, que se incluyen igualmente en los sucesivos periodos, con lo que podemos considerar este problema como uno de los clásicos:

d4: Si se lanza un proyectil en el vacío verticalmente y de abajo arriba, la altura que alcanza está expresada por la fórmula

$$e = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + e_0$$

en la que g es una constante, para cada lugar, denominada intensidad de la gravedad, t representa el tiempo contado desde la salida del proyectil, v_0 la velocidad inicial, con la que es lanzado, y e_0 la distancia al suelo, o posición inicial del proyectil.

En esta hipótesis, se desea calcular la máxima altura que podrá alcanzar un proyectil lanzado desde un metro del suelo, con velocidad inicial de 392 metros por segundo, y al cabo de cuánto tiempo alcanzará esa altura máxima. (Baratech y Royo, p. 137).

Este es el único problema del libro de Baratech y Royo en el que se proporcionan datos concretos, tanto en relación con la velocidad del móvil, como con la gravedad. No sólo eso, sino que además se indica cuál es la función que permite modelizar la situación planteada, a pesar de ser una función frecuentemente utilizada en relación con la Física. Es, por lo tanto, un típico problema de aplicación de las reglas, criterios o algoritmos que se describen en el texto, de forma que lo que se pide obtener es una cantidad concreta en relación con la situación planteada. A los 40 segundos del lanzamiento se alcanza un máximo, la abscisa por lo tanto es un número entero que da como altura máxima $e=7841$ metros. Posiblemente, dada la magnitud que indica el número anterior, en el libro se incluye la siguiente observación al terminar el problema en la que se hace referencia a diferentes fenómenos que no han sido contemplados, ni en el planteamiento, ni en el método de solución utilizado, con lo que se da la sensación de ser una mera reducción o simplificación de los problemas reales, es decir, se presenta una situación totalmente artificiosa y propia no tanto de la realidad, a pesar del contexto al que alude el enunciado del problema, como de una situación más bien de laboratorio en el que se pueden controlar ciertas variables para realizar el estudio del comportamiento de las restantes.

Este resultado parece que está en contradicción con la realidad; pero téngase en cuenta que ha sido calculado como si el proyectil fuera lanzado en el vacío. Prácticamente, el frotamiento del aire opone una gran resistencia a los proyectiles y hace que las alturas alcanzadas sean muy pequeñas comparadas con las calculadas. (Baratech y Royo, p. 138).

4.1.2.2.- Contextos económicos.

También se incluyen en el libro de Carranza dos problemas de tipo **económico** uno relacionado con la depreciación de las piedras preciosas y otro con el consumo de combustible. El primero de ellos, se va a repetir en casi todos los periodos posteriores.

d5: Un diamante de peso p se rompe en dos trozos, de pesos x y $p-x$. Teniendo en cuenta que los valores (monetarios) de los diamantes de igual calidad son proporcionales a los cuadrados de sus pesos respectivos, se pide calcular: 1º depreciación sufrida por la ruptura. 2º máximo de dicha depreciación. (Carranza, p. 124).

El enunciado de este problema también se plantea de modo genérico (con lo que podemos considerar que ésta es una característica típica de este periodo: la utilización de

magnitudes genéricas en lugar del planteamiento con datos concretos) utilizando letras para representar números generales en lugar de indicar cantidades particulares. En el mismo enunciado se dirige al alumno hacia la construcción de la función pertinente que hay que maximizar, indicándole como identificar las variables (x y $p-x$), qué letras utilizar (x y p), el valor del diamante en relación con su peso (es proporcional al cuadrado de su peso). La función que resulta del planteamiento es una función cuadrática, con lo cuál sólo tiene un punto extremo, que en este caso resulta ser un máximo, de ahí que se pida cuál es el máximo de la depreciación y no el mínimo.

El siguiente problema está relacionado con una situación económica en la que se plantea el consumo de combustible de un barco.

d6: Un barco movido con aceite pesado consume por hora un número de litros igual al cubo de su velocidad en nudos. Tal combustible cuesta a 5 ptas. el litro; los demás gastos del barco son 25 000 pesetas por hora. Calcular la velocidad del barco para reducir a un mínimo los gastos de un recorrido de 1 000 millas. (Carranza, p. 123).

La primera frase del enunciado es la traducción de la expresión simbólica de la función que expresa el consumo de combustible del barco, de forma que mediante una correspondencia casi biunívoca se puede expresar algebraicamente dicha función (consume por hora el cubo de su velocidad en nudos $c=v^3$). Destaca la utilización de términos relacionados con las unidades de medida propias de la navegación: nudos en relación con la velocidad y millas en relación con el espacio recorrido. La única referencia a la sociedad del momento es el precio del combustible que puede considerarse real para aquella época, hace poco más de veinticinco años. El problema solicita el valor de la variable que hace mínimo el gasto, pero no dicho gasto (sólo pide la abscisa, no la ordenada que correspondería al gasto para dicha abscisa).

4.1.2.3.- Descripción de fenómenos matemáticos.

El resto de los problemas se refieren a fenómenos matemáticos, sólo uno es de tipo **aritmético**, el resto son de tipo **geométrico**.

El único problema de carácter aritmético es el siguiente:

d7: Encontrar el número x cuya raíz de índice x es máxima. (Carranza, p. 124).

Este problema no se ha encontrado en ningún otro libro de ningún periodo. En él no se relacionan dos cantidades sino una consigo misma, de modo que la función que hay que analizar surge de forma inmediata, sin necesidad de hacer ningún tipo de cálculo algebraico, ya que no hay una ecuación de ligaduras que permita establecer la relación entre las dos variables consideradas. Dicha función es: $x^{1/x}$ que tiene un máximo que es un número real. A pesar de que el planteamiento del problema es sumamente sencillo no ocurre lo mismo con el procedimiento de resolución que resultará atípico, ya que en ningún otro problema de los que hemos analizado, se utiliza un procedimiento semejante. Para poder calcular el máximo hay que recurrir al uso de la derivación logarítmica (lo que es

normal para derivar este tipo de funciones, pero que no se ha utilizado en ninguno de los demás problemas estudiados) y nos dará como solución un número real.

Entre los problemas de tipo geométrico encontramos tanto los que se refieren a figuras planas como aquellos que hacen alusión a figuras tridimensionales. Entre los primeros algunos se refieren a rectángulos como por ejemplo:

d8: *De todos los rectángulos isoperimétricos, calcular el de área máxima.* (Carranza, p. 121).

d8: Entre los cuadriláteros rectángulos que tengan perímetro dado $2p$, ¿cuál será el de mayor área? (Baratech y Royo, p. 132).

d9: De todos los rectángulos de la misma área, ¿cuál es el de perímetro mínimo?. (Carranza, p. 124).

Los problemas anteriores utilizan la figura geométrica de un rectángulo para plantear una situación, que es dual en el último respecto de los dos anteriores. En los dos primeros, al ser los rectángulos isoperimétricos, dicha magnitud lineal es fija mientras que el área puede variar según sean las dimensiones del largo y el ancho, y se tratará de maximizar ese área, en el último, los rectángulos tienen el mismo área y lo que varía en este caso es el perímetro que hay que minimizar. Todos estos problemas poseen una formulación de tipo general, sin que haya en ningún caso datos numéricos con lo que la solución que se espera ha de ser también general, en todos los casos la figura que representa la solución de los problemas es la de un cuadrado. Se utiliza en los enunciados un lenguaje geométrico (“de todos los rectángulos”) que hace referencia a las dimensiones de dichas figuras, aunque dichas dimensiones reciben un tratamiento puramente aritmético, de ahí la utilización reiterada en todos ellos del verbo “calcular”. En el problema de Baratech se indica el perímetro como $2p$, indicando de esta forma no sólo cómo debe nombrarse la variable relativa al perímetro sino que se hace alusión a que se considera este perímetro como una cantidad doble, es decir, se sugiere la consideración de una magnitud lineal repetida dos veces.

Otros problemas, como será habitual en todos los periodos considerados, se refieren a figuras planas como los triángulos:

d10: De todos los triángulos en los que la suma de la base y la altura sea igual a 4 metros. ¿Cuál será el de área máxima? (Baratech y Royo, p. 184).

La formulación del problema anterior es un poco diferente de la habitual, en el sentido de relacionar el perímetro de una figura con su área, como hemos visto en los problemas anteriores; en cambio, en este caso, se proporciona una relación entre dos magnitudes lineales de dicha figura (base y altura) con las que también podría calcularse el perímetro, con una magnitud de segundo orden (área) de forma que mediante las dos primeras se puede calcular la última.

También relacionado con una figura triangular, se incluye el siguiente problema:

d11: Entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa constante. ¿cuál es el que tiene mayor área? (Baratech y Royo, p. 185)

En este caso, se hace alusión a un tipo especial de triángulos, los triángulos rectángulos, relacionados con el teorema de Pitágoras, que permite ligar, igual que en el caso anterior, la base del triángulo con su altura, para poder determinar el área como función de una de dichas magnitudes. La función resultante es distinta que en el caso anterior, puesto que lo es la ecuación que liga las dos variables. En ambos casos se obtiene un triángulo de área máxima, la pregunta que se indica en ambos problemas iniciada por medio de la partícula interrogativa “cuál”, en lugar de “hallar” o “calcular” que se utiliza en otros, sugiere que el lenguaje geométrico impregna todo el enunciado del problema, a pesar de que para su solución se tengan que determinar las medidas de las magnitudes de los triángulos, es decir, que la solución pasa por la utilización de un lenguaje de tipo aritmético-algebraico.

En otros se relacionan dos figuras planas de forma que una está inscrita en otra:

d12: Inscribir en un triángulo equilátero el rectángulo de área máxima. (Carranza, p. 124).

d13: Inscribir en un círculo el rectángulo de área máxima. (Carranza, p. 124).

En ambos problemas se relacionan dos figuras geométricas planas, una de las cuáles, la inscrita, es un rectángulo. Se inician los dos enunciados con un verbo, que implica una acción relacionada con la geometría, inscribir, cuando lo que en realidad se pide, es llevar a cabo un análisis de tipo algebraico de dichas figuras según las dimensiones que poseen, se sobreentiende, por lo tanto, que lo que hay que hacer es calcular las dimensiones del rectángulo en cuestión. Igual que otros problemas que hemos analizado del libro de Carranza, están planteados en general para cualquier dimensión, con lo que las soluciones serán también genéricas, y habrán de adaptarse según sean los datos que se escojan. No se especifica cuáles son los datos o magnitudes fijadas de antemano, no hay ninguna referencia explícita a ellas, por lo que hay que deducirlo del sentido general del problema. Por ejemplo, en el segundo, se supone que el círculo es la figura dada, por lo tanto, lo que es fijo, es su radio que lo determina. En ambos casos la solución óptima es la figura geométrica del cuadrado.

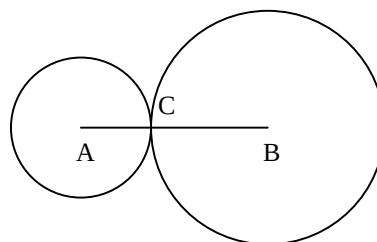
En los dos problemas siguientes, se trata de obtener una figura a partir de otra, que determinará, por lo tanto, alguna de sus magnitudes, en ambos se utilizan círculos, aunque en el primero a partir de él, se construye una figura plana también circular, y en el segundo es a partir de la división de un segmento, figura lineal, que se construyen dos círculos.

d14: Calcular el radio de un círculo a fin de que un sector de él de área dada S , tenga el perímetro mínimo. Calcular el ángulo en el centro del sector (Carranza, p. 124).

Se trata de relacionar el perímetro y el área de una misma figura geométrica que en este caso es circular: el sector circular. Las magnitudes nuevamente son generales, “el área

del sector es S ”, dicha área es una magnitud dada, mientras que el perímetro es variable y hay que minimizarlo. Este problema se ha encontrado en otros periodos, pero planteando la situación dual, en que el perímetro viene dado y el área hay que maximizarla. La función que se obtiene es una función polinómica que se deriva sin dificultad.

d15: *Supongamos un segmento rectilíneo AB cuya longitud representaremos por d y en él, un punto C que lo divide en dos partes, AC y CB , sobre las cuales, tomadas como radios, contruimos dos círculos. Se desea averiguar la posición que ocupará el punto C , para que la suma de las áreas de esos círculos sea la menor posible. (Baratech y Royo, p. 133).*



Este problema es similar a otros de tipo aritmético que hemos visto en los libros históricos de texto, en los que a partir de una cantidad que se divide en dos partes, se desea hacer máxima o mínima otra cantidad formada a partir de ellas. En este caso, en cambio, el planteamiento es puramente geométrico, es decir, que a partir de un segmento (cantidad inicial) dividido en dos partes, se construyen dos círculos cuyos radios son cada una de esas partes. La suma de las áreas de los dos círculos tendrá el mismo papel que en el problema aritmético, la cantidad que se obtiene a partir de las dos iniciales. La función que se utiliza para resolver dicho problema, consiste en una función polinómica de segundo grado, puesto que se refiere al área de los círculos, que tiene un mínimo, cuando el segmento se divide por su punto medio, es decir, cuando los dos círculos tienen el mismo área y, son por lo tanto, iguales. Posteriormente, como veremos, se plantea un problema similar a éste pero utilizando figuras tridimensionales.

En el siguiente problema a partir de una figura plana, cuadrado, se va a construir una figura de tres dimensiones, un paralelepípedo.

d16: Dado un cuadrado de lado a , suprimir de sus vértices cuatro cuadrados, de modo que el resto sea el desarrollo de una caja sin tapa cuyo volumen sea máximo. (Carranza, p. 124)

Este problema que, como vemos, ya aparece en el primer periodo considerado, lo reencontraremos en los sucesivos periodos analizados, en algunos de ellos con una solución muy detallada y con gráficos que indican cómo se lleva a cabo la construcción de la figura de tres dimensiones, lo que no se hace en este caso y, por lo tanto, se supone que el lector es lo suficientemente hábil para darse cuenta de cómo se lleva a cabo el proceso. La figura geométrica analizada es el cuadrado cuyo lado se expresa mediante una letra “ a ” que presupone un número generalizado.

Los problemas que se consideran a partir de ahora, utilizan exclusivamente figuras de tres dimensiones, siendo las más habituales cilindros, conos, esferas y prismas. Entre los problemas en los que interviene un cilindro, tenemos los siguientes:

d17: De todos los cilindros de volumen igual a 1 dm^3 , calcular el de área total mínima. (Carranza, p. 124).

d18: *Entre todos los cilindros que tienen un volumen determinado V , ¿en qué relación estarán la altura y el radio de la base, para que el área total del cilindro sea mínima?* (Baratech y Royo, p. 134).

d19: De todos los cilindros sin tapa de volumen igual a 1 dm^3 , calcular el que tiene mínima área. (Carranza, p. 124).

En el libro de Baratech y Royo se plantea una justificación para el planteamiento de este tipo de problemas de la siguiente forma:

En la industria se emplean, con mucha frecuencia, flotadores cilíndricos e interesa que, para un volumen determinado sean lo más ligeros posibles.

El espesor del metal empleado en esos flotadores es uniforme, por lo que el peso, dependerá del área de la superficie total del cilindro. De aquí que convenga que, para un mismo volumen, tenga un peso mínimo. (Baratech y Royo, p. 134).

Esta justificación resulta un tanto extraña en relación con los planteamientos actuales, en los que este tipo de problemas están más bien relacionados con la fabricación de cilindros de forma que el gasto de material sea mínimo para un determinado volumen. En los dos problemas de Carranza, sí se aportan datos numéricos, en cambio en el de Baratech y Royo, se plantea una situación genérica. Se trata, como hemos dicho, de una figura geométrica tridimensional, el cilindro, en el que hay que relacionar el volumen con el área lateral. En todos los problemas se plantea prácticamente la misma situación salvo que en dos de ellos los cilindros tienen tapa y en el otro no. Igual que en otros problemas se utiliza lenguaje aritmético “calcular” referido a conceptos geométricos “el que tiene área total mínima”. No se proporciona la función que hay que derivar con lo que el alumno debe recordar, las fórmulas del volumen y del área lateral de un cilindro. Se obtiene una función algebraica, que al derivar, nos da como solución que la altura del cilindro debe ser doble de la del radio (igual al diámetro de la base). La pregunta del problema de Baratech y Royo pide identificar una relación entre las dos magnitudes que determinan tanto el área como el volumen del cilindro.

En relación con las esferas, se plantea el siguiente problema, que es una modificación de otro que hemos visto anteriormente en el que se construían dos círculos a partir de la división de un segmento.

d20: Podemos modificar el problema anterior, considerando, en lugar de círculos, esferas cuyos radios fueran los segmentos rectilíneos en que el punto C divide al segmento AB. (Baratech y Royo, pp 133-134).

Igual que en el problema de los círculos se obtiene para su solución una función cuadrática que tiene un mínimo cuando el segmento se divide igualmente por la mitad, es decir, cuando ambas esferas son iguales, tienen el mismo radio y el mismo volumen.

Al igual que en los problemas de figuras planas, también en relación con las figuras tridimensionales se presentan situaciones en las que un cuerpo está inscrito en otro:

d21: Entre todos los conos inscritos en una esfera de 3 metros de radio ¿Qué altura tiene el de mayor volumen? (Baratech y Royo, p. 184).

d22: Entre todos los cilindros inscritos en una esfera de radio 4 ¿cuál es el que tendrá volumen máximo? (Baratech y Royo, p. 184).

d23: Entre todos los prismas regulares de base exagonal inscritos en una esfera de radio 5 ¿Cuál es el que tiene volumen máximo? (Baratech y Royo, p. 184).

En todos ellos la figura circunscrita es una esfera cuyo radio es una cantidad entera, que según la situación va siendo 3, 4 o 5, siendo solamente en el primer caso explícita la unidad de medida elegida: metros. El cuerpo inscrito, por el contrario, va variando siendo en dos casos cuerpos de revolución: cono y cilindro, y en el tercero un cuerpo de caras planas. En todos los problemas que se plantean, se supone que estos cuerpos son regulares, que los cilindros y conos son siempre rectos. En ellos se busca siempre aquél que tiene un volumen máximo aunque en el primer caso se pide la abscisa, con la cuál se obtiene el volumen máximo, y en los otros dos se pide dicho volumen máximo.

4.1.2.4.- Definiciones.

En cuanto a las **definiciones** que introducen los conceptos de máximos, mínimos y puntos de inflexión en cada uno de los libros de este periodo son las siguientes:

d24: Se dice que una función en un punto pasa por un máximo, cuando la función es continua en ese punto y en él pasa de ser creciente a ser decreciente. (Fernández y Jiménez, p. 477)².

d25: Se dice que una función pasa por un máximo en un punto, cuando se verifica que la ordenada en ese punto es mayor que todas las más vecinas tanto por la derecha como por la izquierda. (Fernández y Jiménez p. 257). Es decir, si la función es $y=f(x)$, para que en el punto $x=a$ haya un máximo, se ha de verificar a la vez:

$$f(a) > f(a-\varepsilon)$$

$$f(a) > f(a+\varepsilon)$$

$$\text{o sea, } f(a) - f(a \pm \varepsilon) > 0$$

siendo ε un infinitésimo. (Fernández y Jiménez, p. 478).³

² Igualmente para definir el mínimo se utiliza una definición que conserva el paralelismo con la dada para el máximo. *Se dice que una función en un punto pasa por un mínimo cuando la función es continua en ese punto, y en él pasa de ser decreciente a ser creciente.* (FC y JJ, p. 478).

³ Igualmente para identificar el mínimo se da una definición similar: Se dice que una función continua pasa por un mínimo en un punto, cuando se verifica que la ordenada en ese punto es menor que todas las más vecinas. Es decir, si la función es $y=f(x)$, se ha de verificar a la vez, para que en el punto b haya un mínimo:

$$f(b) < f(b-\varepsilon)$$

$$f(b) < f(b+\varepsilon)$$

$$\text{o sea, } f(b) - f(b \pm \varepsilon) < 0$$

siendo ε un infinitésimo. (Fernández y Jiménez, p. 478).

Se utiliza tanto la definición local del valor de la función en el punto en relación con las ordenadas próximas, como la definición que se refiere a la variación de la función que pasa de ser creciente a decreciente, o viceversa. En la primera definición de Fernández y Jiménez se hace referencia a que la función “pasa” por el punto y no a que el mínimo es un elemento de la función. Tenemos que recordar que estos libros son anteriores a la matemática moderna, en este caso se identifica la función con su gráfica. Se recurre asimismo a la intuición para completar la definición y así se expresa el máximo como que “la función pasa de ser creciente a ser decreciente” haciendo nuevamente alusión a la forma gráfica que tiene la función. Posteriormente, Fernández y Jiménez presentan simultáneamente dos definiciones alternativas: una intuitiva, volviendo a insistir en la representación gráfica de la función (la función pasa por el punto extremos) pero con un matiz aritmético (la ordenada es mayor) y topológico (que las vecinas). La otra es más formal, utilizando símbolos aritméticos, relacionales y letras que representan cantidades infinitesimales (ϵ).

Además de la definición, se añade una anotación en el libro de Fernández y Jiménez que permite considerar que una función puede tener varios máximos, y en distintas posiciones respecto de los ejes de coordenadas.

Naturalmente una función puede tener máximos negativos, y unos máximos mayores que otros. (Fernández y Jiménez, p. 258)

Puede haber mínimos positivos y negativos. Puede haber también unos mínimos menores que otros. (Fernández y Jiménez, p. 478).

Aunque no se distinguen entre extremos relativos y extremos absolutos, ni se utilizan en ningún momento este tipo de términos, sí se indican diferentes posibilidades en relación con ellos, haciendo énfasis en que pudieran existir máximos negativos o que unos sean mayores que otros.

Las definiciones que se incluyen tanto en el libro de Baratech y Royo como en el libro de Carranza son las siguientes:

d26: Se dice que una función $y=f(x)$ tiene un máximo para $x=x_0$, si el valor $f(x_0)$ es mayor que los valores próximos de la función: es decir, si existe un número positivo ϵ tal, que para los incrementos Δx comprendidos entre $-\epsilon$ y $+\epsilon$, se verifica

$$f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$$

(Baratech y Royo, p. 117)⁴.

⁴ Se dice que una función $y=f(x)$ tiene un mínimo para $x=x_0$, si el valor de $f(x_0)$ es menor que los valores próximos de la función; es decir, si existe un número ϵ tal que para incrementos Δx comprendidos entre $-\epsilon$ y $+\epsilon$ se verifica:

$$f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$$

(Baratech y Royo, p. 118).

d27: Se dice que una función $y=f(x)$ admite un *máximo relativo* para un valor de x cuando es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha. (Carranza, p. 119).

Igual que en el libro de Fernández y Jiménez, la definición de Carranza hace alusión a la gráfica de la función, utilizando en relación con ella, términos como derecha e izquierda. En este caso no se señala que la función “pasa” por el punto sino que la función “admite un máximo” indicando que dicho extremo está relacionado con un valor de la variable independiente, y , por lo tanto, es un elemento de la función. En este caso, la función se entiende como variación de unos valores en relación a otros, definición todavía alejada de los planteamientos más formales de la matemática moderna, pero que supone un avance respecto de la definición del libro anterior. Igualmente en la definición de Baratech y Royo se dice que “la función tiene un máximo”, sin hacer ninguna referencia a la gráfica y considerando dicho máximo como un elemento de la función, al igual que lo ha hecho Carranza.

En cuanto a los puntos de inflexión se incluyen las correspondientes definiciones que los caracterizan:

d28: Se denomina punto de inflexión, en una curva, al que separa la curva en dos arcos, cuya convexidad es distinta. (Baratech y Royo, p. 121).

d29: Se dice que una función continua sufre una inflexión en un punto, cuando su gráfica cambia la curvatura, de modo que si antes miraba con la concavidad hacia un lado, pasado el punto de inflexión mira hacia el otro.... La tangente en un punto de inflexión puede ser oblicua, perpendicular o paralela al eje XX' . (Fernández y Jiménez, p. 479).

d30: Los puntos de la curva en que hay un cambio de cóncava a convexa o recíproco se llaman de inflexión. (Carranza, p. 127).

Al igual que para los máximos y mínimos se da la definición correspondiente a los puntos de inflexión. Es significativo, en el libro de Fernández y Jiménez, el uso de la palabra “sufre” en relación con dichos puntos, que sugiere que en dicho punto la función padece un comportamiento anómalo. Al contrario que en las definiciones que hemos visto de máximos y mínimos, que eran más formales, en el caso de los puntos de inflexión es usual hacer referencia al comportamiento de la gráfica de la función, asociándolo con otras dos propiedades, como son la concavidad y la convexidad. La definición es análoga a las utilizadas por los matemáticos en el siglo XVIII. En Fernández y Jiménez, se clasifican los puntos de inflexión según la posición de la recta tangente indicando, que la pendiente puede ser nula, un número finito o una cantidad infinita.

4.1.2.5.- *Descripciones de procesos o reglas.*

A partir de las definiciones, los autores de los libros consideran los criterios y las reglas que se van a utilizar para poder calcular dichos puntos en las funciones correspondientes.

d31: Dada una función $y=f(x)$, si su derivada y' se anula al hacer $x=x_0$ y para ese mismo valor de x la derivada segunda y'' adquiere un valor negativo, la función $y=f(x)$ pasa por un máximo, en el punto correspondiente a $x=x_0$. (Baratech y Royo, p. 118)⁵.

d32: Si una función pasa por un máximo o un mínimo, y tiene en él derivada continua, ésta se anula para el valor de la variable que produce el máximo o el mínimo. (Fernández y Jiménez, p. 479).

d33: Para que una función admita un máximo o un mínimo (relativo) en un punto, es condición necesaria que su derivada se anule en él. (Carranza, p. 119).

Estas condiciones son similares en cuanto a su significado, indican la forma de calcular los máximos y mínimos cuando la función es derivable, aunque ni Carranza ni Baratech y Royo expresan la condición de que la función ha de ser derivable, pero indican qué valor debe tener esa derivada. En la primera, no sólo se establece el criterio para calcular el máximo, sino que además se establece la prueba para asegurarse de que la abscisa encontrada corresponde a un máximo, utilizando para ello la derivada segunda. En la definición de Fernández y Jiménez, se utiliza una expresión del tipo “Si ... entonces ...” mientras que la de Carranza es mas formal y típica de la lógica: “La condición necesaria ...”. Esta última definición se completa, utilizando símbolos algebraicos, que traducen la condición de máximo (mínimo), a un entorno del punto, estableciéndose la relación entre los conceptos de máximo y mínimo, con las condiciones que cumple la función cuando es creciente o decreciente, y con los valores que debe tener su derivada, de la siguiente forma:

En el caso del máximo relativo:

$$f'(x_2-h)>0 \qquad f'(x_2)=0 \qquad f'(x_2+h)<0$$

En el caso del mínimo relativo es:

$$f'(x_4-h)<0 \qquad f'(x_4)=0 \qquad f'(x_4+h)>0.$$

(Carranza, p. 119).

Además, en el libro de Fernández y Jiménez, se hace una aclaración en cuanto a que el cálculo de la primera derivada no es suficiente para establecer si el punto encontrado es un máximo o un mínimo, con lo que se establece la distinción entre un teorema directo y uno recíproco.

El recíproco del teorema precedente no es cierto. Luego en los puntos en los que se anula la derivada, puede haber un máximo, un mínimo o una inflexión paralela al eje de las XX. (Fernández y Jiménez, p. 479)

Se completa la consideración anterior indicándose las diferentes posibilidades en relación con la anulación de la primera derivada: la existencia de un máximo, un mínimo o un punto de inflexión, de esta forma se trata de evitar la creencia de que siempre que la derivada sea cero corresponde a un punto extremo.

⁵ Dada una función $y=f(x)$, si su derivada se anula al hacer $x=x_0$ y para ese mismo valor de x la derivada segunda y'' adquiere un valor positivo, la función $f(x)$ pasa por un mínimo, en el punto correspondiente a $x=x_0$. (Baratech y Royo, p. 118).

En todos los libros analizados se dan reglas que permiten realizar los cálculos relativos a puntos críticos de forma rápida, así en el libro de Baratech y Royo, encontramos la siguiente regla:

d34: Para hallar los máximos y los mínimos de una función, se practicarán las siguientes operaciones:

1ª operación. Hallar la derivada primera de la función.

2ª operación. Igualar a cero esta derivada, resolviendo la ecuación resultante.

3ª operación. Hallar la derivada segunda de la función.

4ª operación. Sustituir en esta segunda derivada, cada una de las raíces obtenidas al resolver la ecuación de la operación segunda.

Si el resultado fuera un número negativo, la función tiene un máximo, y si un número positivo, un mínimo. Cuando ese resultado fuera cero, se estudia la variación de la derivada primera en las proximidades del valor sustituido y, entonces, si la derivada pasa de negativa a positiva habrá un mínimo; si de positiva a negativa un máximo, y si, como es frecuente, se conserva negativa, o positiva, habrá un punto de inflexión, y la función sería decreciente o creciente, respectivamente. (Baratech y Royo, p. 120).

Es significativo el uso del término “operaciones” para referirse a cada uno de los pasos de la regla, lo que sugiere una especie de algoritmo algebraico formado por etapas que permiten graduar la resolución de los ejercicios y problemas. Igualmente, el verbo “hallar” indica que se está haciendo referencia al cálculo algebraico de la derivada de una función, independientemente de las consideraciones analíticas subyacentes. Igualmente, en el resto de los pasos, se utilizan verbos que sugieren la realización de sucesivos pasos de tipo algebraico: “igualar”, “sustituir”. En uno de ellos, se trata de resolver una ecuación, lo cual también conlleva una gran carga de tipo algebraico, y finalmente, cuando se está ante resultados dudosos, es cuando se recurre a consideraciones de tipo más analítico (en el sentido de que se estudian las variaciones de signo) o topológico (en el sentido de que se estudia el cambio en las proximidades del punto) “se estudia la variación de la derivada primera en las proximidades del valor sustituido”. La clave está en la asociación del punto máximo o mínimo con un determinado signo de la derivada segunda.

En cuanto al criterio que permite discriminar los puntos de inflexión, se establece haciendo alusión a la segunda derivada:

d35: En un punto de inflexión, si la función tiene derivada segunda, ésta se anula. (Fernández y Jiménez, p. 481).

La condición anterior se establece por similitud con la dada para los máximos y mínimos, esta vez en relación con los puntos de inflexión y utilizando la derivada segunda en lugar de la primera.

Para los puntos de inflexión, la regla se expresa de forma análoga, y se convierte en la siguiente:

d36: Para hallar las coordenadas de los puntos de inflexión de una curva representada por una función $y=f(x)$, se practican las operaciones siguientes:

1ª operación. Hallar la derivada segunda $y''=f''(x)$.

2ª operación. Suponer $f''(x)=0$ y resolver la ecuación resultante.

3ª operación. Averiguar si $f'(x)$ cambia de signo al pasar x por los valores obtenidos para raíces en la operación segunda. Si así sucede, hay punto de inflexión, y la curva tendrá convexidad análoga al arco AB de la figura 19 cuando $f''(x)$ sea positiva y a la del arco BC cuando sea negativa. (Baratech y Royo, p. 123).

Los pasos son similares a los establecidos para los máximos y los mínimos, utilizando para ello la segunda derivada en lugar de la primera.

En el libro de Fernández y Jiménez la regla establece el criterio de cálculo de los tres tipos de puntos críticos de forma simultánea, y se concreta mediante las siguientes indicaciones:

d37: PRIMERA CUESTIÓN: ¿Cómo determinar los puntos, en que *puede haber* máximo, mínimo o inflexión paralela al eje de abscisas? Comenzaremos por hallar la derivada de la función, que estudiamos. Igualaremos la derivada a cero, y resolveremos la ecuación que resulte: $f'(x)=0$. Las raíces de esta ecuación serán los puntos en los cuales puede haber máximos, mínimos o inflexiones paralelas al eje, según vimos anteriormente. SEGUNDA CUESTIÓN: ¿Cuándo hay ciertamente máximo o ciertamente mínimo?

Hemos visto que en las proximidades de un máximo la derivada pasa de un modo continuo de positiva a negativa, anulándose en el punto que da el máximo. Es decir que $f'(x)$ es decreciente en un entorno del máximo, luego su derivada que es $f''(x)$, será generalmente negativa, y rara vez nula. Luego cuando una raíz de la derivada primera haga negativa la derivada segunda, hay un máximo.

Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0$; $f(a)$ es un máximo.

Si $f''(a)=0$, no podemos afirmar en este curso elemental si hay máximo, mínimo o inflexión.⁶

TERCERA CUESTIÓN: Averiguados los puntos en que ciertamente hay un máximo o mínimo, quizá interese averiguar *cuánto valen el máximo y el mínimo*.

Para responder a esta pregunta se llevan los valores que produjeron el máximo y el mínimo, sobre la función dada. (Fernández y Jiménez, pp. 480-481).

Las sucesión de reglas que se dan para calcular máximos y mínimos sugiere, al igual que en el libro de Baratech y Royo, una especie de algoritmo formado por pasos sucesivos que conducen a la resolución de los problemas de optimización y al cálculo de los puntos de inflexión. El problema se plantea desde una perspectiva geométrica “determinar puntos ... paralela al eje de abscisas”, dado que no hay concordancia de género ni de número entre “puntos” y “paralela”, hemos de suponer que se hace referencia a las tangentes en dichos puntos. La sucesión de frases que siguen a continuación, se plantean como sugerencias de acciones encaminadas al cálculo de máximos, mínimos y puntos de inflexión. Esto permite construir un algoritmo algebraico de cálculo, relativo a conceptos analíticos, que dependen del comportamiento de una función en un entorno. Hay continuas referencias a la gráfica de la función “ $f'(x)$ es decreciente” ligándolas a planteamientos aritméticos como “ $f''(x)$ será generalmente negativa” o incluso algebraicos “raíz de la derivada primera”. Finalmente, se propone encontrar los valores extremos “llevándolos” como si de una acción manipulativa se tratara sobre la función. Es claro el carácter instrumental que se ha querido imprimir en

⁶ De forma similar se hace para el mínimo.

torno a los conceptos de puntos críticos en este libro. Un planteamiento similar se utiliza para el cálculo de los puntos de inflexión, es decir, se enumeran una serie de acciones sucesivas que puedan traer como consecuencia el cálculo de dichos puntos:

d38: Hemos dicho que la derivada segunda se anula en los puntos de inflexión; luego para averiguar los puntos de inflexión se halla la derivada segunda, se la anula, y se resuelve la ecuación, y las raíces son los puntos buscados, con al que las raíces halladas no anulen también a la derivada primera, porque en ese caso puede haber máximo, mínimo o inflexión paralela al eje de las XX.

Si queremos saber cuánto vale la ordenada de la curva en el punto de inflexión, se lleva el valor, que la produjo a la función dada, y se calcula su valor. (Fernández y Jiménez, p. 482).

Se incluye además una “regla completa para el cálculo de máximos y mínimos” sin ninguna aclaración de su origen ni de su significado, cuándo debe emplearse, por qué es necesaria una regla tan elaborada, qué relación existe con la regla anteriormente formulada,...

d39: REGLA COMPLETA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS. Si la derivada que no se anula para $x=a$ es de orden par, hay un máximo o un mínimo: máximo, si dicha derivada es negativa; mínimo si es positiva.
Si la primera derivada que no se anula es de orden impar, hay una inflexión paralela al eje de abscisas. (Fernández y Jiménez, p. 483).

En el libro de Carranza se proporciona el siguiente procedimiento para el cálculo de máximos y mínimos, aunque sin especificar que se trata de una regla, pero indicando los sucesivos pasos que la constituyen:

d40: El procedimiento uniforme para determinar los máximos y mínimos relativos de una función $f(x)$ es:
1º Derivarla, es decir, calcular $f'(x)$.
2º Resolver la ecuación $f'(x)=0$.
3º Estudiar los cambios de signo de $f'(x)$ cuando x pasa por cada una de las raíces. Si pasa de $+$ a $-$, hay máximos, y si pasa de $-$ a $+$, hay mínimo. (Carranza, p. 120).

Con ella lo que se pretende, es dar un método sencillo de cálculo de máximos y mínimos, ante la ardua tarea que supondría ir comprobando cuál es el punto en el que la función toma un valor mayor. Se expresa por medio de sentencias numeradas de forma ordinal que sugieren la presencia de un algoritmo de cálculo mediante pasos sucesivos que conducen al resultado final. Cada uno de los pasos está definido por una acción algebraica: derivar, resolver la ecuación y en el último sustituir valores cercanos al puntos para averiguar el signo de la función derivada en ellos. No se hace referencia a la segunda derivada y al significado que ésta tiene tanto en relación con los puntos en cuestión, como su comportamiento en relación con la primera derivada.

Igualmente para el cálculo de los puntos de inflexión se establece la regla correspondiente:

d41: Para determinar los puntos de inflexión de la curva $y=f(x)$ se resuelve la ecuación $f''(x)=0$ y de sus raíces se consideran solamente las que hacen cambiar el signo de $f''(x)$. (Carranza, p. 127).

En este caso sí se utiliza la derivada segunda mediante la cual ha de resolverse la ecuación correspondiente, con lo que uno de los pasos establecidos es puramente algebraico, pero también se hace un estudio en el entorno del punto, es decir, se trataría de un estudio de tipo más bien analítico por medio del que se pretende establecer el signo de la derivada segunda, es decir, si cambia de positivo a negativo, lo cual indicaría un cambio en la convexidad y estaríamos ante un punto de inflexión. No se hace ninguna referencia a las diferentes posibilidades en relación con la tangente en el punto de inflexión.

Unidad de información	Fernández y Jiménez				Baratech y Royo				Carranza			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
d1	T1	T6	E11	E16								
d2									E1	E6	T11	T16
d3					E1	T6	T11	C16				
d4					T1	T6	T11	T16				
d5									E1	T6	E11	T16
d6									T1	T6	E11	C16
d7, d12, d13, d16									E1	E6	E11	E16
d8					E1	E6	E11	E16	E1	E6	E11	E16
d9, d15, d20					E1	E6	T11	E16				
d10, d21, d22, d23					T1	E6	E11	E16				
d11, d18					E1	E6	E11	E16				
d14									E1	E6	T11	E16
d17									T1	E6	E11	E16
d19									E1	E6	E11	C16
Carácter	T	T	E	E	E/T	E	E/T	E	E	E	E	E
d24, d29	E2	C7	E12	E17								
d25	T2	T7	E12	T17								
d26					T2	E7	E12	T17				
d27, d30									E2	C7	E12	E17
d28					E2	C7	E12	E17				
d31					T2	T7	T12	E17				
d32	E2	T7	T12	T17								
d33									E2	T7	T12	E17
d34					E2	T7	T12	E17				
d35	E2	T7	T12	E17								
d36					T2	T7	T12	T17				
d37	C2	T7	T12	E17								
d38, d39	E2	T7	T12	E17								
d40, d41									T2	T7	T12	E17
Carácter	E	T	E/T	E	E/T	T	E/T	E/T	E/T	T/C	E/T	E

Tabla 4.1.1 Descripciones de los libros de texto en el periodo 34-67

4.1.3.- Tablas

En este periodo ya se hace uso de las tablas, tanto de valores de la función como de tipo variaciones, pero no es común a todos los libros, así en el libro de Carranza no se incluyen tablas en relación con el estudio de funciones, en el libro de Baratech y Royo aparecen para cada función estudiada y, por último, sólo hemos encontrado una tabla en el libro de Fernández y Jiménez. Todas ellas se encuadran dentro del grupo de tablas de descripción local.

4.1.3.1.- Tablas de descripción local.

La mayoría de las funciones utilizadas son algebraicas de tipo polinómico, aunque en el libro de Baratech y Royo se emplea una función trascendente. Las tablas se utilizan a modo de resumen en el que se describe el comportamiento local de la función, siendo la funciones usadas en Baratech y Royo: $y=x^2$, $y=x^2-4x-5$, $y=x^3-2x^2-7x-4$, $y=x^4-8x^2-9$, $y=\text{sen}x$;

y en Fernández y Jiménez se propone exclusivamente la función $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+1$.

Las tablas utilizadas en el libro de Baratech y Royo, se disponen en filas horizontales, correspondientes a la función inicial y cada una de las funciones derivadas, así por ejemplo, para la función $y=x^3-2x^2-7x-4$, la tabla que se adjunta es la siguiente:

x	$-\infty$	...	-1		$\frac{2}{3}$		$\frac{7}{3}$		∞
y'	positiva		0		negativa		0		positiva
y''			-10		0		10		
y	$-\infty$ crece		0 decrece		$-\frac{250}{27}$ decrece		$-\frac{500}{27}$ crece		∞
			máximo		inflexión		mínimo		

t1: (Baratech y Royo, p. 128)

En la primera fila se representan los valores de la abscisa para los que existe algún tipo de singularidad junto con los valores extremos de la recta real $-\infty$ y $+\infty$. En la fila correspondiente a la primera derivada, se indica si para la abscisa correspondiente el signo del valor de dicha función en ese punto es positivo, negativo o si la derivada se anula. Respecto de la segunda derivada se indica el valor que dicha derivada toma en la abscisa correspondiente. En la fila correspondiente a la función se indica, según sea pertinente, o bien el valor de la función para la abscisa, o bien el carácter creciente o decreciente de la función en el punto. Por último, como resumen de los resultados incluidos en la tabla, se decide el tipo de punto que corresponde a cada una de las abscisas de los puntos singulares,

es decir, si se trata de un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. Los signos de las derivadas no se indican utilizando el símbolo específico que les corresponde (+ o -), sino utilizando las palabras “positivo” o “negativo”. Asimismo, se hace referencia a alguna de las características de la función, como los intervalos en los que es creciente y en los que es decreciente, aunque el signo de la segunda derivada indicaría el tipo de convexidad asociada a cada intervalo, no se representan mediante los términos correspondientes dichas características. De forma similar se hace para las demás funciones especificadas, incluida la función seno en la que los puntos críticos están dados en función de π .

La función $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$, que es una función cúbica, se representa tabularmente en el libro de FC y JJ en columnas verticales en lugar de la disposición de la tabla anterior, presentándose por lo tanto de la siguiente manera:

x	y	y'	y''
↓	crec.	+	
a	Max.	0 } decrec.	-
↓	decrec.	-	
e	Inflex.	- ($\neq 0$)	0
↓	decrec.	-	
c	Min.	0 } crec.	+
	crec.	+	

t2: (Fernández y Jiménez, p. 483)

Se analizan en diferentes columnas, relacionando el comportamiento de los valores de la variable independiente, los de la variable dependiente, los de la derivada de la función y los de la derivada segunda. En ella, se utilizan apócopos del lenguaje habitual como crec., decrec. Max. o min. para representar las características que posee la función, se utilizan flechas para indicar la variación de la variable independiente, signos aritméticos como + y - relacionados tanto con el crecimiento y el decrecimiento como con la concavidad y la convexidad, en clara referencia a los signos que poseen la primera y la segunda derivada en relación con dichas propiedades de las funciones. De esta forma se hace énfasis en que lo único importante respecto de dichas funciones es el signo que poseen en dicho punto, que nos informa del comportamiento de la función. Esto resulta muy diferente de aquello a lo que están acostumbrados los alumnos, que normalmente se fijan en las cantidades numéricas más que en hacer abstracción de dicha cantidad y centrarse exclusivamente en el signo que poseen.

Unidades de información	Fernández y Jiménez				Baratech y Royo				Carranza			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
t1					C3	C8	T13	T18				
-									E3	E8	E13	E18
t2	T3	C8	T13	T18								
Caracter	T	C	T	T	C	C	T	T	E	E	E	E

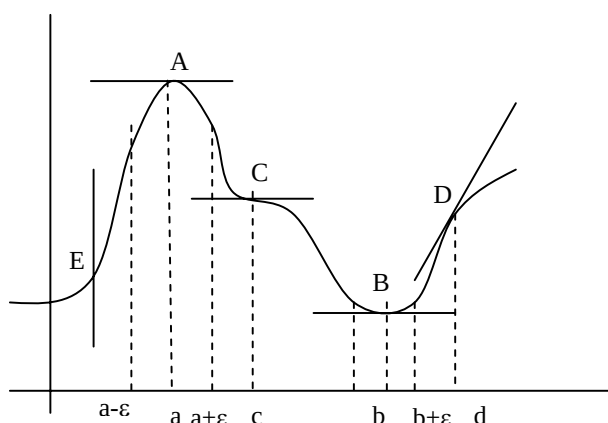
Tabla 4.1.2: Tablas de los libros del periodo 34-67

4.1.4.- Gráficas.

Las representaciones gráficas que aparecen en estos libros de texto son abundantes en cualquiera de ellos. Algunas representan funciones particulares y otras se utilizan para representar funciones genéricas, en el sentido de que se hace énfasis en la forma de la curva, analizando las diferentes posiciones de los puntos singulares. Las hemos clasificado en dos bloques correspondientes a las que se utilizan como mensaje topológico local y las correspondientes a los ideogramas.

4.1.4.1.- Mensaje topológico local.

Entre las gráficas que se presentan en los libros analizados, está la siguiente, que corresponde a un mensaje topológico.

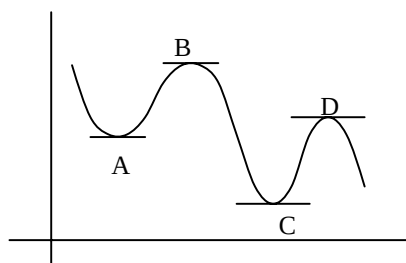


g1: (Fernández y Jiménez p. 477, fig. 257)

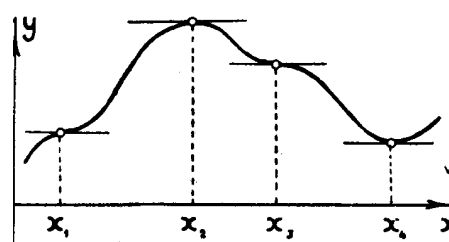
En ella, los intervalos se representan indicando los términos referentes a los extremos de dichos intervalos, de esta forma se dirige la atención hacia una parte de la gráfica, en torno a cierto punto en el que interesa estudiar los valores que toma la función en dichos puntos cercanos. Los intervalos que se utilizan son simétricos, siendo el punto medio, un punto crítico, y utilizando para identificar los extremos una cantidad representada por ϵ , símbolo normalmente usado en relación con las cantidades infinitesimales. Mediante líneas punteadas se relacionan las abscisas con el punto de la curva correspondiente. Como posteriormente veremos en otras gráficas de otros periodos, ésta se puede considerar topológica parcialmente, ya que aunque se señala el intervalo correspondiente al eje de abscisas, no se hace lo mismo respecto del eje de ordenadas. En realidad se están fundiendo distintos tipos de gráfica: mediante las líneas punteadas se pudiera tener un atisbo de la gráfica como ábaco y la utilización de las distintas tangentes en los puntos críticos sugiere considerarla como ideograma. Además, en un mismo gráfico, se presentan distintos tipos de puntos críticos: máximos, mínimos y puntos de inflexión, representando para este último tipo de puntos las distintas posiciones de la recta tangente: horizontal, vertical u oblicua.

4.1.4.2.- Ideogramas.

En los libros de Baratech y Royo, y en el de Carranza, hemos encontrado sendas gráficas similares, de tipo **ideograma**, que se utilizan a modo de ilustración de los conceptos relativos a puntos críticos.



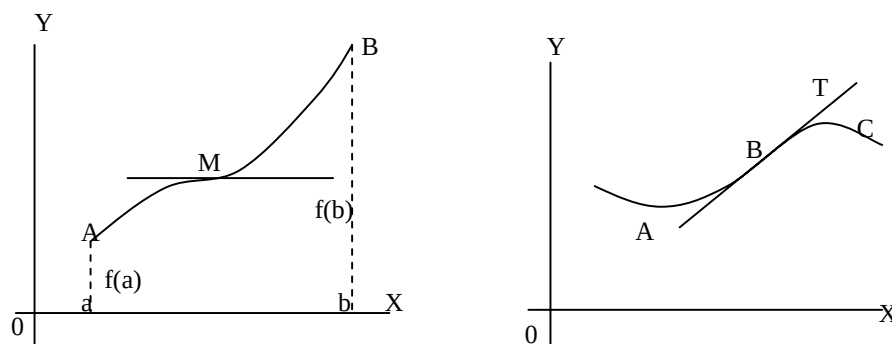
g2: (Baratech y Royo, p. 116)



g3: (Carranza, p. 118)

En la de la izquierda, sólo se presentan puntos máximos y mínimos junto con la tangente en dichos puntos. Se resaltan dichos puntos tanto mediante la construcción de la recta tangente en ellos, e identificándolos por medio de letras mayúsculas. No se hace referencia ni a la abscisa ni a la ordenada de dichos puntos, sino que se centra la atención en ellos como puntos de la curva. En esta gráfica sólo se representan los puntos extremos: máximos o mínimos. En la gráfica de la derecha, en cambio, se presentan todos los diferentes tipos de puntos críticos: un máximo, un mínimo y dos puntos de inflexión. La utilidad de ambas gráficas viene determinada porque sirve de ilustración, boceto o ejemplo del tipo de comportamiento que tiene la gráfica de una determinada función cuando tiene alguno de estos puntos. Mediante el trazado de las rectas tangentes en los puntos, se señala la relación que existe entre la tangente y la gráfica. Se utilizan las líneas punteadas como recurso para relacionar la abscisa con el punto de la curva que tiene tangente horizontal. Al contrario que en la gráfica del apartado anterior, no se han incluido los diferentes tipos de puntos de inflexión en relación con la pendiente o posición de la tangente, y están representados todos ellos con la tangente en posición horizontal.

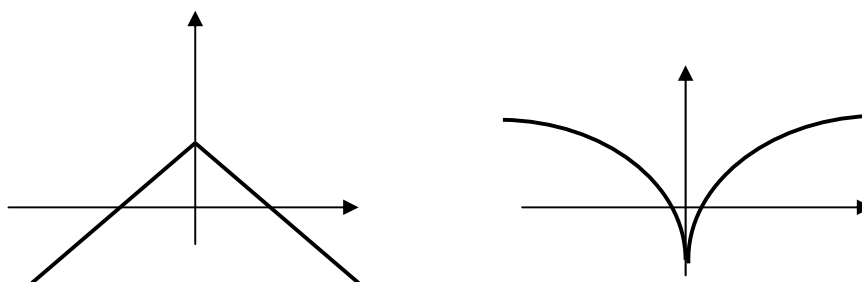
Otras gráficas que también se utilizan en forma de ideograma en el libro de Baratech y Royo, son las que hacen referencia a los puntos de inflexión, dado que en la gráfica anterior sólo se han representado los máximos y mínimos. Se presentan dos gráficas en relación con dichos puntos para comprobar gráficamente que no es necesario que la derivada primera sea nula para obtener un punto de inflexión, es decir, que gráficamente puede que la tangente en ese punto no sea horizontal:



g4, g5: (Baratech y Royo, p. 122)

En una de las gráficas se presenta un punto de inflexión con tangente horizontal, y en la otra con una tangente oblicua, en realidad se marca el punto en el que se produce un cambio de curvatura. En relación con la derivada primera, inicialmente en el arco AB dicha derivada crece porque aumenta la inclinación de la recta tangente, luego dicha derivada decrece porque disminuye dicha inclinación, por ello la derivada segunda pasa de positiva a negativa. Curiosamente en el libro de Baratech y Royo aunque hay un apartado dedicado al estudio de la variación de una función, en el que se calculan los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, se calculan máximos, mínimos y puntos de inflexión, y se hacen las tablas correspondientes a los resultados obtenidos; no se traducen luego todos estos datos a la representación gráfica de la función.

En el libro de Carranza, se representan gráficamente las funciones $y=1-|x|$ y $y=x^{2/3}$, utilizando para ello un gráfico de tipo ideograma ya que los ejes no poseen escalas, con lo que sólo se presenta la forma que tendrá la curva sin que ésta en ningún momento sea exacta.



g6, g7: (Carranza, p. 120)

Dichas gráficas se utilizan como ilustración de funciones que, a pesar de tener respectivamente un máximo y un mínimo, no son funciones derivables, y, por lo tanto, no es válida la regla habitual de cálculo de puntos extremos, para la que se exige la derivabilidad de la función en el punto. Dado que dichas funciones no son derivables, sus tangentes en dichos puntos no serán horizontales, es decir, el criterio que permite decidir si un punto es máximo o mínimo, no indica que la tangente en dicho punto sea horizontal, sino que en el primer caso, tendremos que en el punto hay dos tangentes, una calculada por

la derecha y la otra por la izquierda, y en el segundo caso se trata de una función en la que la tangente es vertical, lo que en los libros clásicos se denomina punto de retroceso. El criterio que se adecúa a este tipo de máximos y mínimos, establece cómo han de ser los valores que toma la función en los puntos cercanos.

Se representan gráficamente funciones como $y=5-4x-x^2$, $y=2x^3-3x^2$, $y=e^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ (Carranza, pp. 128-132), es decir, entre las representaciones se incluyen funciones polinómicas, racionales, trascendentes, y algunas especiales como $y=1-|x|$. Dichas representaciones se utilizan para mostrar los pasos a seguir para representar gráficamente cualquier función, incluyendo los resultados obtenidos en relación con las sucesivas derivadas de dicha función y utilizándolos para identificar cuándo es creciente o decreciente, cóncava o convexa, cuáles son sus puntos críticos,...

Unidades de información	Fernández y Jiménez				Baratech y Royo				Carranza			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
g1	E4	E9	C14	E19								
g2, g4, g5					E4	C9	C14	E19				
g3									E4	C9	C14	E19
g6, g7									C4	C9	C14	E19
Caracter	E	E	C	E	E	C	C	E	E/C	C	C	E

Tabla 4.1.3: Gráficas de los libros del periodo 34-67

4.1.5.- Expresiones simbólicas.

Las expresiones simbólicas aparecen en la relación de ejercicios propuestos, aunque la mayoría se incluyen entre los ejercicios resueltos. Dichos ejercicios tratan del cálculo de máximos, mínimos, puntos de inflexión y representación gráfica de algunas funciones.

En los libros de Baratech y Royo, y en el de Carranza casi todas las funciones son polinómicas, se utilizan como ejemplos para practicar los criterios y reglas de determinación de los puntos críticos, para el estudio gráfico de las funciones o en relación con el planteamiento de problemas de optimización. En el libro de Fernández y Jiménez sólo hemos encontrado una expresión simbólica que es polinómica. Hemos encontrado las siguientes funciones clasificadas según los tipos de expresión simbólica utilizada:

4.1.5.1.- Expresiones algebraicas polinómicas.

En este apartado incluimos funciones cuadráticas, cúbicas, cuárticas etc, la mayoría representadas mediante sumandos en los que el exponente de la variable independiente va decreciendo. El coeficiente de la mayor potencia suele ser positivo y en casi todas ellas, la variable independiente se representa mediante la letra x , y la dependiente con la letra y . Sólomente en algún caso se utiliza una representación diferente, como en un problema de optimización, en el que la variable independiente es el tiempo t , y la dependiente el espacio e . También hay que resaltar una función de grado cuatro, cuya representación se presenta como trasladada de otra función utilizando para ello un binomio cuadrado.

- Cuadráticas:

e1: $y=x^2$ (Baratech y Royo, p. 125); $y=x^2-4x-5$ (Baratech y Royo, p. 126);

$e = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + e_0$ (Baratech y Royo, p. 137); $y=3x^2$ (Baratech y Royo, p. 182);

$y=4x^2-5$ (Baratech y Royo, p. 182); $y=4x^2+2x-1$ (Baratech y Royo, p. 182); $y=2x^3-6x+4$ (Baratech y Royo, p. 184); $y=-3x^2+8$ (Baratech y Royo, p. 185); $y=2x^2-5x$ (Baratech y Royo, p. 185)

$y=x^2$; $y=(x+2)^2-3$; (Carranza, p. 124)

- Cúbicas:

e2: $y=4x^3+2x^2-5$ (Baratech y Royo, p. 120); $y=x^3$ (Baratech y Royo, p. 121); $y=x^3-3x^2-7x-4$ (Baratech y Royo, p. 126); $y=x^3-9x^2+15x-3$ (Baratech y Royo, p. 183); $y=x^3-3x+1$ (Baratech y Royo, p. 185); $y=-12x-x^3$ (Baratech y Royo, p. 185).

$y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+1$ (Fernández y Jiménez, p. 480)

$z=t^3-12t^2+45t+1$ (Carranza, p. 124)

- Cuárticas:

e3: $y=4x^4+2x^3+1$ (Baratech y Royo, p. 123); $y=x^4$ (Baratech y Royo, p. 124); $y=x^4-8x^2-9$ (Baratech y Royo, p. 128); $y=2x^4-5x+7$ (Baratech y Royo, p. 184); $y=x^4-5x^2+4$ (Baratech y Royo, p. 185); $y=(x^2-1)^2+5$ (Baratech y Royo, p. 185)

$y=3-x^4$; $y=x^4-5x^2+4$ (Carranza, p. 124)

- Quínticas:

e4: $y=3x^5-5x^3$; $y=3x^5-10x^4$. (Carranza, p. 127).

Dentro de este grupo podemos incluir, asimismo, otras funciones también polinómicas, pero que poseen parámetros indeterminados, con lo que hacen referencia a una familia de funciones. Dichas funciones se incluyen en los problemas relativos a los máximos y mínimos, en el sentido de que se trata de determinar dentro de dicha familia, una función que posea o bien un máximo o bien un mínimo predeterminado. Todas esas funciones son polinomios de segundo grado.

e5: $y=-x^2+px+q$; $y=x^2+px+q$; $y=-x^2+2mx+1$; $y=x^2-x+m-1$ (Baratech y Royo, p. 183)

$y=at^2+bt+c$. (Carranza, p. 124)

4.1.5.2.- Expresiones polinómicas factorizadas.

Entre las funciones polinómicas, algunas aparecen factorizadas, resaltándose por ello los cortes con los ejes, como por ejemplo:

e6: $y=(x-3)(x-2)$; $y=x(x-1)^2$; $y=(x+1)(x+2)(x-3)$; $y=(x-2)^2(x+3)(x-4)$ (Baratech y Royo, p. 185)

$$y=(x-1)^2x^4 \text{ (Carranza, p. 124)}$$

e7: De una función se conoce la expresión de su derivada

$$f'(x)=(x+2)x(x-1)$$

Se pide encontrar: 1º intervalos de crecimiento de $f(x)$; 2º valores de x que hace máximo y mínimo a $f(x)$. (Carranza, p. 124).

En esta última, hay que resaltar que se trata de reconstruir, a partir de la expresión de la función derivada, el comportamiento de una función primitiva, con lo que se están relacionando, en realidad, dos expresiones simbólicas.

4.1.5.3.- Expresiones racionales:

Entre las expresiones racionales encontradas, la mayoría se ha escogido de forma que no tengan ningún punto de discontinuidad, y siendo todas ellas fácilmente derivables.

$$\mathbf{e8:} \quad y = \frac{x+1}{x-1}; \quad y = \frac{x^2-25}{x+1} \text{ (Baratech y Royo, p. 185)}$$

$$y = \frac{3}{2+x^2}; \quad y = \frac{4}{2+x^2}; \quad y = \frac{x^2-5x+4}{x^2+1} \text{ (Carranza, p. 127).}$$

4.1.5.4.- Expresiones irracionales:

$$\mathbf{e9:} \quad y = \sqrt{x+1} \text{ (Baratech y Royo, p. 185)}$$

$$\text{Sea la función } y=x^{2/3} \text{ (Carranza, p. 120); } z=x\sqrt{4x-x^2} \text{ (Carranza, p. 127)}$$

4.1.5.5.- Expresiones trascendentes trigonométricas:

De las funciones circulares así como de alguna que implica una operación algebraica entre funciones circulares.

e10: $y=\operatorname{sen} x$ (Baratech y Royo, p. 129); $y=\operatorname{cos} x$ (Baratech y Royo, p. 184); $y=\operatorname{tg} x$ (Baratech y Royo, p. 185); $y=\operatorname{sec} x$ (Baratech y Royo, p. 185); $y=\operatorname{cosec} x$ (Baratech y Royo, p. 185); $y=\cos x - \cos 2x$ (Baratech y Royo, p. 185)

$$y=\operatorname{sen} x; \quad y=\cos(2x-1); \quad y=\cos^2 x; \quad y=\frac{\operatorname{sen}^2 3x}{\operatorname{sen}^2 x} \text{ (Carranza, p. 124)}$$

4.1.5.6.- Expresiones trascendentes exponenciales.

Se obtienen no sólo a partir de la función exponencial, sino multiplicándolas, o componiéndolas con otras. Estas funciones resultan muy fáciles de derivar, pero no de identificar sus puntos críticos, al utilizar el número e. La primera sólo tiene un punto de inflexión en el origen de coordenadas, la segunda, al multiplicar por la función seno que es periódica, tiene varios máximos y mínimos, y la tercera no tiene ni máximos ni mínimos ni puntos de inflexión.

$$\mathbf{e11:} \ y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}); \ y = e^{-x} \sin x; \ z = e^{t+1} - e^t - t \text{ (Carranza, p. 124)}$$

4.1.5.7.- Expresiones trascendentes logarítmicas:

Resulta del cociente de un polinomio con un logaritmo y tiene un mínimo.

$$\mathbf{e12:} \ z = \frac{t}{\log t} \text{ (Carranza, p. 124)}$$

4.1.5.8.- Expresiones de funciones especiales:

Sólo hay una en la que interviene el valor absoluto, no es una función derivable, así que no se puede aplicar la regla para el cálculo de máximos y mínimos.

$$\mathbf{e13:} \ \text{Sea la función } y = 1 - |x| \text{ (Carranza, p. 120).}$$

Unidades de información	Fernández y Jiménez				Baratech y Royo				Carranza			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
e1					E5	T10	T15	T20	T5	T10	T15	T20
e2	T5	T10	E15	T20	T5	T10	T15	T20	T5	T10	T15	T20
e3, e8, e9					T5	T10	T15	T20	T5	T10	T15	T20
e4, e11									T5	T10	T15	T20
e5					E5	T10	T15	T20	E5	T10	T15	T20
e6, e10					T5	C10	T15	T20	T5	C10	T15	T20
e7									T5	C10	T15	T20
e12, e13									C5	C10	E15	T20
Caracter	T	T	E	T	T	T	T	T	T	T/C	T	T

Tabla 4.1.4. Expresiones simbólicas de los libros del periodo 34-67

4.1.6.- PERFILES.

A continuación se establece el perfil de cada uno de los libros analizados, teniendo en cuenta los datos de las tablas que se han construido en cada uno de los apartados anteriores. Cada una de las columnas de dichas tablas, corresponden a diferentes dimensiones del perfil, de forma que viendo si el carácter predominante de la columna es expositivo, tecnológico o comprensivo se va completando cada uno de dichos perfiles.

4.1.6.1.- Perfil de Baratech y Royo.

El libro de Baratech y Royo incluye todos los contenidos que indica el programa de la asignatura de séptimo de Bachillerato, dedicando un volumen al Análisis y otro a la Geometría Descriptiva. Se utiliza el lenguaje de las funciones, sin hacer referencia a las variables, como ocurrirá en el caso de Fernández y Jiménez. Algunos de los comentarios que se hacen en los problemas relativos a máximos y mínimos son indicativos del momento histórico en el que fue escrito este libro como el uso de los flotadores cilíndricos en la industria, y las aproximaciones de las medidas relativas a vigas realizadas a partir de troncos de árbol. El lenguaje y la forma de organizar los contenidos que tiene este libro fue común a otros libros de dicho plan que se utilizaron con posterioridad a él, de modo que estuvieron en vigor conjuntamente con libros del plan siguiente. Podemos considerar a este libro de características similares al de Carranza que fue publicado con posterioridad, con lo que está un poco adelantado a su época.

Se usan algunos términos y símbolos formales y los problemas no aportan datos concretos sino que generalmente se utilizan letras que simbolizan números generalizados. En cuanto al tipo de funciones utilizadas hay una gran variedad aunque la mayoría son de tipo polinómico pero hay otras de tipo racional y trascendente. La estructura de los enunciados es la típica utilizada en la formulación matemática, tanto en relación con los problemas, como con las definiciones y las reglas de cálculo. No se produce ninguna interacción entre los diferentes sistemas de representación, aunque hay alguna traducción mínima entre las definiciones de máximos y mínimos, y algunos símbolos matemáticos ($f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$).

El tipo de situaciones que se plantean incluye tanto problemas estrictamente matemáticos como otros relacionados con contextos físicos o económicos, aunque son más abundantes los primeros. Los conceptos matemáticos aparecen en compartimentos estancos, de forma que no se relacionan unos con otros, de hecho en el mismo programa de Bachillerato se pone título a esta parte del programa como: Análisis, diferenciándola y separándola del resto y, como hemos dicho esta parte, aparece en un libro exclusivamente dedicado al Análisis. Las interpretaciones son de tipo algorítmico, porque lo que interesa es practicar la regla de cálculo ofrecida en la lección. Como los problemas son de tipo general, las soluciones que se obtienen de ellas también lo son, de tal forma que de dichas soluciones no importa la forma que tienen sino su significado, así se dice: “*entre todos los rectángulos de igual perímetro $2p$, el de mayor área es el cuadrado con lado igual a $\frac{p}{2}$* ” (Baratech y Royo, p. 132), de esta forma se ofrece una interpretación cualitativa de los resultados obtenidos.

La presentación de la lección así como de sus diferentes apartados es totalmente estática, igual que en los demás libros de este periodo y de acuerdo con las posibilidades de la época. Los problemas son escolares y su formulación es la típica de este tipo de problemas. Las herramientas didácticas usadas son las disponibles del momento y los conceptos de máximos y mínimos se usan tanto para la representación gráfica de funciones

como para los problemas de optimización, aunque la mayoría están relacionados con este último tópico.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema	*	*	
	Descripciones teóricas	*	*	
	Símbolos utilizados en las tablas			*
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología	*		
	Tipos de descripciones		*	
	Tipos de tablas			*
	Tipos de gráficas			*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*	*	
	Papel de las definiciones	*	*	
	Actividades relacionadas con las tablas		*	
	Actividades gráficas			*
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum	*		
	Influencias didácticas	*	*	
	Aplicación de las tablas		*	
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.1.5: Perfil del libro de Baratech y Royo

El perfil del libro de Baratech y Royo corresponde a un libro de carácter **tecnológico** ya que se pone bastante énfasis en el desarrollo de las técnicas necesarias para la resolución de problemas-tipo, con algunas aplicaciones prácticas y la posibilidad de visualización de los conceptos a través de gráficas, que se usan a modo de iconos de dichos conceptos para proceder a su reconocimiento sin dificultad, pero tiene al mismo tiempo una marcada tendencia **expositiva**, dado el tipo de definiciones que se presentan y la época en la que fue escrito el libro. Las únicas representaciones en las que se da una orientación comprensiva es en las gráficas y en las tablas, pero de una forma muy limitada.

4.1.6.2.- Perfil de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez.

En el libro de Fernández y Jiménez se tratan todos los contenidos incluidos en el programa aunque, como es un libro sólo de contenidos, son escasísimos los ejercicios y ejemplos que se exponen en él. La exposición se hace desde un punto de vista totalmente teórico, aunque el objetivo especificado en la lección indica que se pretende dar la regla adecuada para el cálculo de máximos y mínimos, que se cumple pero no se pone en práctica. La enseñanza que se propone es de tipo cíclico, como era usual en la época, repitiéndose los contenidos en los sucesivos cursos al mismo tiempo que se van ampliando. No sólo la estructura del libro es propia de la época en que fue escrito sino que hay alguna referencia a la sociedad de la época en que fue escrito el, ya que en el único problema que

se resuelve se utiliza una unidad de medida (bujía) de la luminosidad actualmente en desuso, de hecho la misma palabra en la sociedad actual tiene un significado totalmente distinto. De todas formas, dado que es mas un libro de contenidos que de aplicaciones, la mayor parte del lenguaje es específico de las matemáticas, sin referencia, por lo tanto, a situaciones cotidianas. El libro tuvo una gran influencia en los libros de programas posteriores, que utilizaron un lenguaje similar, y en los que se hicieron ligeras modificaciones, tanto en relación a la presentación de los contenidos, como en la secuenciación de éstos.

Entre los términos usados hay muchos de carácter intuitivo: “una función en un punto **pasa** por un máximo”, “ la ordenada es **mayor** que todas las más vecinas”, “ máximos **mayores** que otros”, “una función continua **sufre** una inflexión en un punto”. La utilización de símbolos típicamente matemáticos es muy escasa, limitándose al uso de los símbolos de las operaciones aritméticas y algunos de tipo relacional ($<$, $>$), aunque es típico de los libros de este periodo el símbolo ε relacionado con los infinitésimos. Las expresiones que se utilizan para representar funciones son las habituales, $f(x)$, $y=$, y los tipos de funciones, se limitan a las polinómicas con gran escasez de otros tipos diferentes. La estructura de los enunciados de los escasos ejercicios y de las definiciones es clásica: “se dice que..., cuando” y no hay ningún tipo de interacción entre los diferentes sistemas de representación.

La fenomenología es exclusivamente matemática, a excepción del problema relacionado con la luminosidad, el contenido aparece totalmente parcelado sin que haya interacción de diferentes conceptos matemáticos, en la parte de Análisis se tratan exclusivamente conceptos matemáticos. Las soluciones que se dan a los problemas, son simplemente el resultado de la aplicación de un algoritmo, sin que halla ninguna interpretación, por lo que se da una visión típicamente cuantitativa de las situaciones planteadas.

La presentación del desarrollo de la lección es totalmente estática, como era de esperar en la época que estamos tratando, los problemas (a pesar de su escasez) son de tipo escolar. El uso de herramientas didácticas, que se limitaban a la utilización de algunas gráficas, tipos de letra (cursiva, negrita), maquetación del libro y escritura de símbolos matemáticos; es propia de la época. Los contenidos de máximos y mínimos se utilizan tanto para la representación gráfica de funciones, como para el estudio de estas y la optimización.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema		*	
	Descripciones teóricas	*		
	Símbolos utilizados en las tablas		*	
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología		*	
	Tipos de descripciones		*	
	Tipos de tablas			*
	Tipos de gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*		
	Papel de las definiciones	*	*	
	Actividades relacionadas con las tablas		*	
	Actividades gráficas			*
	Papel de las expresiones simbólicas	*		
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículo	*		
	Influencias didácticas	*		
	Aplicación de las tablas		*	
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.1.6: Perfil del libro de Fernández y Jiménez

En el caso del libro de Fernández y Jiménez se trata, a la vista del gráfico anterior, de un libro de carácter **expositivo-tecnológico**, cuya estructura viene determinada por la gran importancia que se concede a las definiciones formales de los conceptos, con una marcada ausencia de ejercicios para practicar los conceptos desarrollados a lo largo del tema, aunque son las propias definiciones las que se centran en la aplicación de los conceptos y en su forma de uso, y que posteriormente debería usarse en casos prácticos.

4.1.6.3.- Perfil de Carranza.

El libro de Carranza incluye todos los contenidos que indica el programa de la asignatura de sexto de Bachillerato, se utiliza el lenguaje de las funciones sin hacer referencia a las variables como era el caso anterior. El contexto social viene reflejada, en parte, en el problema relacionado con el barco, en el que se dan los costes del consumo de combustible. Tanto las cantidades indicadas como la utilización del término “aceite pesado” es característico de dicha época. El lenguaje y la forma de organizar los contenidos que tiene este libro fue común a otros libros de dicho plan, que se utilizaron con posterioridad a él, de modo que estuvieron en vigor conjuntamente con libros del plan siguiente.

Los términos usados son formales, introduciendo algunos nuevos como “extremos relativos”, incluso los problemas no aportan datos concretos, sino que generalmente utilizan letras que simbolizan números generalizados. En cuanto al tipo de funciones utilizadas hay una gran variedad, desde las más sencillas polinómicas, otras de tipo racional, trascendente y una que contiene un valor absoluto. La estructura de los enunciados es la típica utilizada

en la formulación matemática, tanto en relación con los problemas, como con las definiciones y las reglas de cálculo. No hay ninguna interacción entre diferentes sistemas de representación.

El tipo de situaciones que se plantean incluye tanto problemas estrictamente matemáticos como otros relacionados con contextos físicos o económicos, aunque son más abundantes los primeros. Los conceptos matemáticos aparecen en compartimentos estancos, de forma que no se relacionan unos con otros, de hecho en el mismo programa de Bachillerato se pone título a esta parte del programa como: Análisis, diferenciándola y separándola del resto. Las interpretaciones son de tipo algorítmico, porque lo que interesa es practicar la regla de cálculo ofrecida en la lección. Como los problemas son de tipo general, las soluciones que se obtienen de ellas también lo son, de tal forma que de dichas soluciones no importa la forma que tienen, sino su significado, así se dice: “de todos los rectángulos isoperimétricos, el cuadrado es el de área máxima” de esta forma se ofrece una interpretación cualitativa de los resultados obtenidos.

La presentación de la lección, así como de sus diferentes apartados, es totalmente estática, igual que en el libro anterior, y de acuerdo con las posibilidades de la época. Los problemas son escolares y su formulación es la típica de este tipo de problemas. Las herramientas didácticas usadas son las disponibles del momento, y los conceptos de máximos y mínimos se usan tanto para la representación gráfica de funciones, como para los problemas de optimización, aunque la mayoría están relacionados con este último tópico.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema	*		
	Descripciones teóricas	*	*	
	Símbolos utilizados en las tablas	*		
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología	*		
	Tipos de descripciones		*	*
	Tipos de tablas	*		
	Tipos de gráficas			*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	*
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*		
	Papel de las definiciones	*	*	
	Actividades relacionadas con las tablas	*		
	Actividades gráficas			*
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum	*		
	Influencias didácticas	*		
	Aplicación de las tablas	*		
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.1.7: Perfil del libro de Carranza

El perfil del libro de Carranza, es un libro **expositivo**, en el que no se pone tanto interés en la aplicaciones como en los libros anteriores, pero sí se establece un cierto desarrollo de las reglas y técnicas necesarias para el cálculo de los puntos críticos. Semánticamente se utilizan ciertas representaciones que tratan de dotar de significado a los conceptos y de abarcar diferentes posibilidades. Hay algunas referencias a la sociedad del momento y se valoran algunos aspectos comprensivos. El libro es un fiel reflejo del carácter instrumental que poseían las matemáticas en aquella época.

4.2.- Introducción de la Matemática Moderna: 1967-1975.

Este periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (B.U.P.) en el año 1975.

4.2.1.- Planes de estudio y libros del periodo 1967-1975.

Durante la década de los sesenta, la “matemática moderna” se va introduciendo en los programas de Bachillerato. El punto de arranque lo podemos situar en la Reunión de Catedráticos de Matemáticas de Enseñanza Media, que organizada por el Centro de Orientación Didáctica del Ministerio de Educación Nacional. se celebró en Madrid en 1959 con el título de “Nuevas Orientaciones en la Enseñanza de las Matemáticas”. En esta reunión, D. Pedro Abellanas, catedrático de Geometría de la Universidad Central, disertó sobre las bondades de la nueva corriente en la Enseñanza de las Matemáticas. Las razones que se apuntaron para introducir la matemática moderna en el Bachillerato, recogidas en Rico y Sierra (1994), son las siguientes:

1. La matemática moderna proporciona esquemas más sencillos para poder presentar la materia del Bachillerato.
2. Con la matemática moderna se puede organizar dicha materia de modo más racional.
3. Los fines esenciales de la matemática en la enseñanza media son dos: formativo e instrumental.
4. Ambos fines pueden lograrse con más eficacia mediante la matemática moderna.
5. Tanto en la teoría como en los algoritmos, el alumno con la matemática moderna, puede llegar a discurrir con más precisión y claridad.
6. Con la matemática moderna, se estudiarán las materias que tengan carácter fundamental, y las que no poseen este carácter, quedarán relegadas como simples ejercicios a desarrollar por los alumnos.

En 1962, se constituyó la “Comisión para el Ensayo Didáctico sobre Matemática Moderna en los Institutos Nacionales” (creada por O.M. de 7 de Diciembre de 1961)

presidida por el profesor Avellanas, y cuyo trabajo piloto se desarrollará en los Institutos: “Cervantes” (Madrid) por el profesor J.R. Pascual Ibarra, “Milá y Fontanals” (Barcelona), por el profesor J. Casulleras, y en el “Padre Suárez” (Granada) por el profesor F. Marcos de Lanuza. La comisión editó, en los años 1967 y 1969, textos piloto para los cursos 5º y 6º de Bachillerato respectivamente. También, el Ministerio editó unos Cuadernos Didácticos, dedicados a desarrollar temas de matemáticas modernas. Desde el año 1963 hasta el año 1966, la revista Enseñanza Media, publicó una serie de artículos bajo el título “Lecciones de matemática moderna”; de este modo, y progresivamente, se fue implantando un programa en el Bachillerato, cuyos cimientos son la Teoría de Conjuntos, y que maneja las estructuras matemáticas en sentido bourbakista, es decir, las estructuras algebraicas, de orden y topológicas. De hecho, los textos piloto se convirtieron en el nuevo programa de Matemáticas en el Bachillerato.

Se han elegido tres obras representativas de este periodo que corresponden a tres bloques o tendencias existentes en él (Sierra, González y López): el texto piloto publicado por la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media, el libro de la editorial Edelvives, que se puede encuadrar en un modelo que continúa y mantiene las características del periodo anterior, y el libro más moderno, correspondiente a la editorial SM, que introduce una matemática estructural y axiomática, pero que propone actividades para el alumno, y en el que las explicaciones se basan en la experimentación. Tendremos tres bloques de libros, caracterizados por:

- Algunos libros que se publican durante este periodo, mantienen la estructura de los libros de la época anterior con muy ligeras modificaciones. Son libros en los que predomina la enseñanza de procedimientos de tipo algorítmico, con lo que se plantean numerosos ejercicios de aplicación de los conocimientos adquiridos. Dentro de este grupo hemos analizado el libro:

Título: Matemáticas. Sexto curso.

Autor: Sin autor.

Año, editorial y lugar de la primera edición: 1972 Editorial Luis Vives: Zaragoza.

Localización del manual utilizado: Biblioteca personal.

- También, se publican textos encargados ex profeso, para concretar el programa oficial recién promulgado, constituye la culminación de los trabajos de la “Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media” presidida por el profesor Don Pedro Avellanas, Catedrático de la Universidad de Madrid.

Título: Matemática moderna. Sexto curso

Autor: Pedro Abellanas Cebollero, Joaquín García Rúa, Alfredo Rodríguez Labajo, Juan Casulleras Regás, Francisco Marcos de Lanuza.

Año, editorial y lugar de la primera edición: 1969, M.E.C. Madrid

Localización del manual utilizado: Biblioteca del I.E.S Lucía de Medrano, Salamanca.

Siguiendo la línea marcada por la matemática moderna, el texto piloto presenta una matemática totalmente estructurada y construida sobre unos cimientos, que están constituidos por la Teoría de Conjuntos, en consonancia con las ideas bourbakistas. El carácter instrumental de las matemáticas en este libro, deja mucho que desear, por lo que no aparecen situaciones o aplicaciones, ni propias de las matemáticas ni externas a ellas. Se puede considerar un libro eminentemente teórico, en el que la formalización es el eje del discurso.

- Por último, tenemos que considerar un bloque de libros, que aunque introducen la matemática de una forma estructural y axiomática, a la vez proponen actividades para el alumno, y las explicaciones se apoyan en la observación de ciertos fenómenos. Dentro de este grupo, hemos considerado el libro:

Título: Matemáticas especiales. C.O.U:

Autor: C. Marcos y J. Martínez

Año, editorial y lugar de la primera edición: 1973 Editorial S.M. Madrid.

Localización del manual utilizado: Biblioteca personal.

En este libro, se produce un aumento de los contenidos respecto de los otros bloques considerados, aunque se inscribe dentro de la corriente de la matemática moderna. Esto está claramente expresado en el prólogo del libro, en el que se ensalza a Bourbaki por haber: “reelaborado modernamente con expresión axiomática y formalizada toda la matemática tradicional, centrando su estudio en las estructuras abstractas y generales”. Considera una doble vertiente de las matemáticas:

1. Como modelo para la ciencia por su axiomatización y formalización.
2. Como herramienta por su dimensión como apoyo experimental que tiene toda ciencia.

Este decantamiento hacia la matemática moderna se percibe también, en la alusión que en el mismo prólogo del libro se hace a Piaget, donde se dice textualmente que: “Piaget ha demostrado que las formas humanas de pensamiento, coinciden con las estructuras de la matemática moderna”. Esta orientación del libro, se matiza como hemos dicho incluyendo numerosos ejercicios, ya que en palabras de los autores: “la asimilación por parte de los alumnos de la estructura axiomática y formalizada que tiene la matemática moderna, debe completarse con la intuición basada en la experiencia”, así queda justificada la gran cantidad de ejercicios que hay a lo largo del texto. Con todos estos ingredientes los autores piensan que en relación con el aprendizaje de las matemáticas: “la perspectiva es mucho más agradable e interesante y, por supuesto, más lógica. Y además los alumnos las asimilan más rápidamente, y desde luego sin tanta dificultad como los mayores”.

4.2.2.- Descripciones.

Dentro de estas formas de representación de los conceptos matemáticos, en este periodo hemos encontrado fenómenos más variados que en el periodo anterior,

incluyéndose, no sólo los típicamente matemáticos que son comunes a todos los periodos así como a los libros clásicos, sino otros de los tipos que hemos clasificado en el capítulo dos. Si buscamos fenómenos no matemáticos que se incluyan en los libros de este periodo, encontramos que en el texto piloto no hay ninguna referencia a situaciones físicas, sociales o de ningún tipo fuera de las propiamente matemáticas, en cambio, en los libros de Edelvives y SM, hay problemas similares, relacionados, tanto con situaciones cotidianas, como con situaciones de tipo físico. A pesar de ello, sólo en el libro de Edelvives, aparecen abundantes gráficos para interpretar la situación planteada.

4.2.2.1.- Descripción de situaciones cotidianas.

Los problemas referentes a situaciones cotidianas, son problemas en los que el contexto está relacionado con formas geométricas y con las medidas de dichas formas, y en realidad la situación, es un pretexto para plantear un problema de tipo geométrico. La situación utilizada se construye a partir de una forma geométrica que se quiere estudiar, y se analiza la variación de una magnitud en función de otra prefijada.

d1: Disponemos de una chapa metálica y deseamos construir un depósito abierto de base cuadrada y cuya capacidad sea 864 litros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del depósito para que su superficie y, por consiguiente, la cantidad de chapa empleada sea mínima? (Edelvives, p. 151).

Se plantea averiguar la superficie mínima para un volumen dado de un prisma, de tal forma que se optimice la utilización de chapa. En este problema se incluyen expresiones que centran la atención en dos magnitudes: capacidad y superficie, así como en el cuerpo geométrico que se trata de optimizar: depósito de base cuadrada (prisma) y el tipo de extremo que se trata de calcular: mínimo. Para poder resolver el problema, se necesita la conversión de la medida de capacidad, que se expresa en litros, a dm^3 , ya que la longitud en que vendrán expresados los lados del prisma son los decímetros, lo cual implica un cierto grado de competencia que debería haber sido adquirido en la educación primaria, y que será recordado en sexto curso de Bachillerato.

Otros se refieren a cuerpos geométricos que se construyen con figuras planas en los que se busca, por ejemplo, conseguir un volumen máximo siendo fijo el perímetro de un rectángulo.

d2: Si nos dan un rectángulo de cartón de 30 y 40 centímetros de lado. ¿Cómo deberemos construir con él una caja que pueda contener la mayor cantidad posible de caramelos? (TP, p.158).

En este caso se utilizan términos como: rectángulo, lado, caja (ortopedro), se intenta buscar un máximo en relación con su capacidad (contener la mayor cantidad posible de caramelos).

El siguiente problema se refiere al cálculo del área máxima para un perímetro dado.

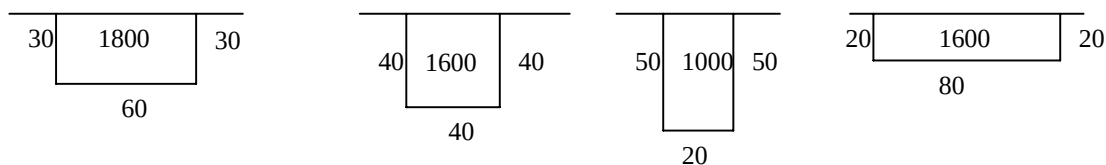
d3: Con una cuerda de 2000 m de longitud hemos de cercar un terreno que nos regalan y que debe tener forma rectangular. ¿Cómo hemos de colocar la cuerda? (TP, p. 157).

Hay que destacar, respecto de la situación planteada, lo insólito de cercar un terreno con una cuerda, la aparatosidad de tener que hacerlo con una que mide 2000 m, y el hecho de que la forma del terreno no dependa de los accesos a él. Se nos dice la forma del terreno: rectangular, pero la referencia al perímetro no es explícita “cuerda de 2000 m de longitud”, ni se expresa la magnitud que se trata de optimizar, ni el tipo de punto extremo que se trata de calcular (se debe deducir que se quiere un área que sea máxima). Es el más oscuro de todos los problemas planteados, proviene del texto piloto, y aunque plantea una situación “cotidiana”, tal como está expresada debería ser clasificada, mas bien, como geométrica.

Para poder comparar este problemas con alguno similar, hemos seleccionado uno que aparecen en Kaput, J. (1993)⁷ que es similar y tiene la forma:

A farmer has 120 m of fencing with which enclose a rectangular pastures along a straight river (where no fence will be needed). How should the farmer lay out the fence in order to enclose the pasture with the largest area, and what is this area?.

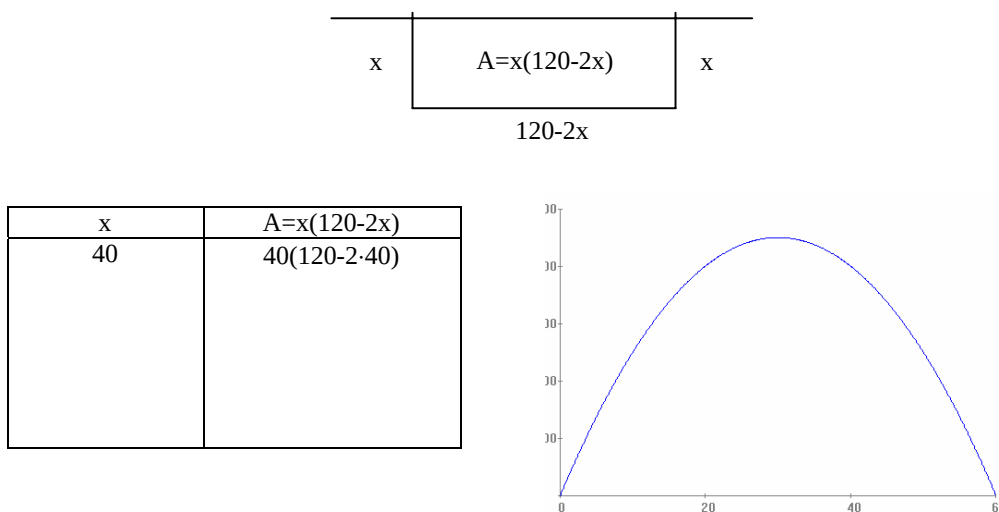
La aproximación estándar, consiste en dibujar un diagrama de un pasto típico, etiquetarlo con variables, escribir la función que deseamos maximizar en términos de una variable (usando una ecuación auxiliar si es necesario), y maximizar la función usando la derivación. El primer problema, en relación con los alumnos, es si hay problema o no, es decir ¿hay alguna diferencia en relación con la colocación de la valla? ¿No será el área siempre la misma?. La mejor respuesta a estas preguntas, es intentar dibujar diferentes colocaciones de la valla, que revelen, que el tamaño del área, depende de cómo la coloquemos, para ello, se utilizan diagramas en los que se incluye el área correspondiente, dentro del rectángulo:



Ante esta situación, propone una presentación más dinámica utilizando software adecuado, por ejemplo CABRI. Utilizando dicho software, se dibuja un diagrama variable similar a los anteriormente descritos, delimitado por las condiciones: tres lados, rectangular, con perímetro fijo de 120 unidades. Se etiqueta este diagrama, con las medidas correspondientes, de tal forma que si se varía el diagrama, se varíen sus medidas bajo el control del usuario, y a partir de él, se puedan construir representaciones tabulares y gráficas ligadas por esa variación.

El acto de construir y etiquetar el diagrama dinámico, es similar a los pasos iniciales en la versión estándar, de establecer la función, aunque en el entorno del ordenador, se puede hacer feed-back inmediato, que guíe el proceso.

⁷ Kaput, J. (1993) The Urgent Need for Proleptic Research in the Representation of Quantitative Relationships (En T.A. Romberg, E. Fennema y T.P. Carpenter: Integrating Research on the Graphical Representation of Functions. Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey (Hillsdale), pp. 299-301.



El problema que incluimos a continuación, es otro de los clásicos, y en él se plantea la situación contraria.

d4: La cerca de un solar cuesta a 75 ptas. el metro lineal, y se desea adquirir un solar de forma rectangular de superficie 25 áreas, con la condición de que el coste de la cerca sea mínimo. Se pide hallar cuánto nos costará dicha cerca. (SM, p. 138).

Hay que calcular el perímetro mínimo de un rectángulo para un área prefijada ya que para optimizar el coste, evidentemente, el alumno deberá deducir, que esto implica que deberá optimizar el perímetro. Se emplea como unidad de medida de la superficie del terreno, el área, que actualmente está ya en desuso, y resulta sorprendente el que la cerca cueste 75 ptas el metro lineal, que está condicionado por la época en la que fue escrito el libro. A ello habría que añadir el que lo único que importa al comprar el terreno, es decir, la medida del perímetro, pero no el que tenga agua, luz,... más determinantes desde el punto de vista práctico. Se da la forma del solar: rectangular, las magnitudes: superficie y cerca (perímetro), y el tipo de extremo: mínimo.

d5: El Reglamento de Correos de cierta nación autoriza paquetes cuya suma de longitud y contorno no excede de 18 dm. ¿Cuál es el mayor volumen de un paquete que se puede enviar por correo?

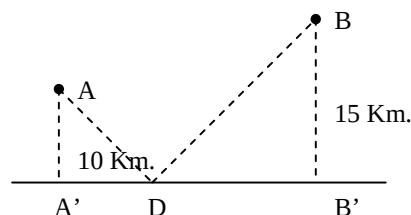
Nota.- Supón los paquetes de forma de cilindros de revolución. (SM, p. 139).

En este quinto problema se trata de maximizar el volumen de un cilindro en el que se da el perímetro de la base y la altura, lo cual no resulta lo más habitual, ya que normalmente se da directamente el área de lateral. Este último problema, representa claramente la artificialidad de la situación planteada, en Correos no se encuentran a menudo paquetes de forma cilíndrica por la dificultad de preparación. El cuerpo geométrico es: cilindro de revolución; las magnitudes: volumen y suma de longitud y contorno, de lo que hay que deducir que se trata de la suma de las medidas de la circunferencia de la base, la altura del cilindro y el extremo que hay que calcular es un máximo.

4.2.2.2.- Recorridos mínimos.

Otro tipo de problemas, son los de recorridos mínimos, de los que hemos encontrado en los libros analizados dos muy semejantes. Las magnitudes que se definen son todas lineales, ya que se refieren a distancias entre dos puntos (tasa de variación de la distancia).

d6: Dos ciudades A y B están situadas a 10 y 15 km de un río. Debiendo aprovisionarse ambas ciudades de un mismo depósito D construido sobre el borde del río ¿En qué punto debe encontrarse este depósito para que la longitud de los tubos de conducción sea mínima? Se sabe que la proyección de la distancia AB sobre el borde del río es de 20 km. (Edelvives, p. 155)



En el problema anterior, se incluye un gráfico de la situación, que da pie a utilizar el teorema de Pitágoras. La incógnita será uno de los catetos desconocidos, y el otro vendrá determinado en función de él. Desde el punto de vista práctico, los alumnos deberían darse cuenta de que la optimización de la hipotenusa equivale a la optimización de su cuadrado, para facilitar los cálculos.

d7: Un navío N se encuentra a 9 km de la costa, según la dirección perpendicular NB. En la costa, a 15 km. de B hay un puesto militar. Un marinero debe llevar un mensaje a dicho puesto, y va en bote a la velocidad de 4 Km/h, y andando a 5 Km/h. Averigua a qué distancia del puesto debe desembarcar para que el tiempo empleado sea mínimo. (SM, p. 137).

Se plantea una situación determinada por la época en que fue escrito el libro de SM, dado que un marinero ha de hacer de correo de un mensaje, lo que implica que las comunicaciones no son muy fiables. También es significativa la velocidad del bote que implica que no es un fueraborda, por ejemplo.

4.2.2.3.- Fenómenos físicos.

Entre los problemas en los que se estudian fenómenos físicos, algunos están relacionados con herramientas y el estudio físico de las mismas, como la utilización de palancas, en ellos aparecen términos propios de la física como resistencia, género, punto de apoyo,... Estos problemas sólo los hemos encontrado en los libros de este periodo, con lo que se ajustan a la idea de que la formación en matemáticas debe tener un carácter instrumental de aplicación a otras ciencias.

d8: Se quiere levantar un peso R de 400Kg, empleando una palanca homogénea de segundo género, cuyo peso en kilogramos es igual al doble de su longitud en metros. Si el peso R se halla suspendido de un punto distante 1 metro del punto de apoyo A, ¿cuál habrá de ser la longitud de la palanca para que el esfuerzo sea mínimo?. (Edelvives, p. 152)

d9: Una palanca de sección constante y, de 4 Kp. de peso por cada metro de largo se apoya en un extremo para levantar un peso de 64 Kp aplicado a medio metro del punto de apoyo. ¿Cuál debe ser la longitud de la palanca para que la potencia sea mínima? (SM, p. 138)

En el primero de ellos, se dice que el esfuerzo ha de ser mínimo, y hay que encontrar la fórmula matemática adecuada que modelice la situación planteada, lo que requiere ciertos conocimientos sólidos de las fórmulas físicas que se relacionen con funciones matemáticas. Dichas funciones vendrán definidas a partir de una variable independiente que no será x generalmente, por ejemplo, la variable l de la longitud de la palanca, por lo tanto, en el momento de derivar la función, habrá que reconocer dicha variable, como aquélla en la que está realizando un estudio local. En el libro de Edelvives resulta ciertamente utópico, intentar levantar con la ayuda de una palanca, un peso de nada menos que 400 kg, la solución es evidentemente descomunal, la palanca necesita tener una longitud de 20 m. Es digno de destacar la similitud entre estos dos problemas en dos libros de corte diferente.

En los problemas relacionados con fenómenos de naturaleza física como la electricidad o la velocidad, los términos utilizados son: resistencia, fuerza electromotriz, potencia, velocidad, aceleración, gravedad... y las unidades de medidas asociadas al concepto: ohmio, voltio, m/s, m/s^2 , ...

d10: Una pila eléctrica de resistencia interna $r=0'2 \Omega$ y de fuerza electromotriz $E=1$ voltio, está unida a un circuito de resistencia R . Se desea saber el valor que ha de tener R para que la potencia P de la corriente suministrada sea máxima. (Edelvives, p. 153)

En este problema son válidas las explicaciones dadas en los anteriores, ya que primeramente hay que modelizar la situación física planteada, para obtener la fórmula adecuada que exprese la variación de la potencia en relación con la resistencia e intensidad. Llama la atención la utilización de números decimales en los datos, lo cual no suele ser habitual ya que dificulta los cálculos, y se supone, que ésto no es lo esencial en este tipo de situaciones. Se debería tratar más bien de interpretar los resultados obtenidos, más que centrarse en operar con números decimales que no es el objetivo. Es un problema que resuelve el libro, y al final se expone la interpretación del resultado, en el sentido de que en general, para que en una pila de potencia P sea máxima, ha de ser $R=r$.

Los problemas que incluyen nociones relativas a la velocidad, suelen ser los más habituales en el cálculo variacional, tanto aquéllos que se refieren a velocidades uniformemente aceleradas, como a la caída de un cuerpo o el movimiento rotacional. En los dos problemas siguientes se provee al alumno de la función pertinente para llevar a cabo los cálculos, por lo que el objetivo es la práctica del algoritmo de cálculo de los extremos.

d11: La fórmula que da el alcance de un cañón es $a = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$, siendo v la velocidad de salida del proyectil; g la aceleración de la gravedad ($9'80 \text{ m/seg}^2$) y α la inclinación del cañón ¿Cuál será el alcance máximo de un cañón que comunica al proyectil una velocidad de 500 metros por segundo y con qué inclinación habrá de disparar para conseguirlo?. (SM, p. 138).

d12: Un punto recorre en línea recta la distancia $s=1/3t^3-25t$ en t segundos. Hallar su aceleración en el punto en el que su velocidad es nula. (SM, p. 138).

Se trata de calcular, en el primer caso la distancia máxima alcanzada por el proyectil (alcance) en función de la inclinación de un cañón. Se trata de una situación modelizada mediante una función trascendente en la que el ángulo de inclinación también es variable, con lo que habrá que utilizar una estrategia de ensayo-error para calcular dicho ángulo. Las características propias de resolución de este problema se refieren: una de ellas a la necesidad del manejo de las razones trigonométricas para los ángulos habituales, un poco de sentido común (si el lanzamiento se hace con un ángulo de 90° el proyectil nos cae encima), y el trabajo con números decimales dada la división por la constante de gravedad. El segundo problema también incluye la ecuación del movimiento, siendo una función cúbica, pero no se da el dominio de definición de la función, es decir, hay que interpretar tanto las situaciones en las que los tiempos sean negativos como en las que también lo sea el espacio. Puede resultar paradójico el hecho de que la velocidad sea nula y la aceleración positiva, que corresponde al mínimo de la cúbica, o negativa, en cuyo caso tendríamos el máximo.

4.2.2.4.- Descripción de fenómenos matemáticos.

En otros ejercicios se trata de descripciones de fenómenos matemáticos que se proponen para modelizar mediante alguna de las funciones u operaciones estudiadas. Algunos son de tipo **aritmético** ya que en ellos subyace alguna operación aritmética, que posteriormente se relaciona con un objeto geométrico:

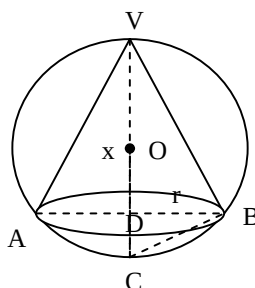
d13: Descomponer un número en dos sumandos cuyo producto sea máximo. (Edelvives, p. 149)

d14: Descomponer un número en dos factores positivos cuya suma sea mínima. (Edelvives, p. 150).

Así en el primero de los problemas se concluye en su resolución: “Como consecuencia de la anterior deducción diremos que de todos los rectángulos de igual perímetro, el que tiene mayor área es el cuadrado” y en el segundo: “De todos los rectángulos de igual área, el cuadrado es el que tiene menor perímetro.” Los términos del enunciado del problema son indicios de este carácter aritmético: sumandos, producto, factores, suma; se trata de relacionar estas dos operaciones. En uno de los casos hay que calcular un máximo y en otro un mínimo. Los dos pertenecen al mismo libro y plantean dos situaciones complementarias: mantener constante la suma y variar el producto en función de ella hasta encontrar el que sea máximo o bien mantener fijo el producto y variar la suma en función de él para encontrar la que sea mínima.

Pero la mayoría de los problemas matemáticos son de tipo **geométrico** relacionados con la medida de cuerpos geométricos, como es el caso de que el volumen de conos o cilindros inscritos en esferas de radio dado sea máximo, o de cuerpos engendrados por la revolución de figuras planas con medidas prefijadas. En ellos se incluyen términos relacionados con figuras espaciales: cono, esfera, con elementos de esas figuras espaciales: altura, volumen.

d15: ¿Para qué valor de la altura es máximo el volumen de un cono inscrito en una esfera de 15 cm. de radio? (Edelvives, p. 151).



d16: Dada una esfera de 3 metros de radio, halla:

1º Los elementos del cono inscrito de volumen máximo.

2º El volumen y la superficie total de este cono. (SM, p. 138)

d17: Hallar el volumen del mayor cono recto que pueda engendrarse haciendo girar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene 2 cm. alrededor de uno de sus catetos. (SM, p. 138)

En el primero se incluye un gráfico que interpreta los datos del problema y las incógnitas, a partir de ella utilizando la semejanza de triángulos y la fórmula del volumen de un cono, se podrá plantear la función que modeliza la situación. El siguiente perteneciente al libro de SM es similar, pero al igual que en otros problemas planteados en este libro se exageran las medidas de los objetos que se incluyen en el problema (esfera de 3 m y la solución da un resultado de 4m de altura para el cono y 32 m^3 aproximadamente de volumen del cono). La impresión que se recibe del problema es que la situación simplemente funciona como una excusa para plantear un problema referente a un determinado contenido. Tanto el profesor como el alumno deben mantener una distancia con el problema, en el sentido de que su solución es independiente de los datos que éste proporcione, y que pueden ser más o menos reales. No tiene sentido la interpretación ni de los datos ni de los resultados, los ejercicios son, por tanto, un medio de practicar las reglas adquiridas y no es de extrañar que las interpretaciones queden fuera de lugar. El que la resolución de problemas en las últimas reformas se haya centrado, tanto en la comprensión del enunciado, como en la interpretación de los resultados obtenidos, puede haber incitado a la modificación del planteamiento de estos problemas, o a tener más cuidado en su formulación.

d18: De todos los conos de revolución que tiene la misma generatriz, $a=3 \text{ m}$, halla el volumen del que lo tiene máximo. (SM, p. 139).

Este problema, también del libro de SM, plantea la situación contraria de los anteriores, es decir, la hipotenusa del triángulo es de tan sólo 2 cm, en este caso no se sabe muy bien qué sentido tiene plantearse que el cono tenga un volumen máximo (cuando en realidad será ínfimo ya que el resultado no es siquiera 1 cm^3). Idéntico a este problema es el siguiente en el que vuelve a plantearse una situación descomunal: la generatriz tiene 3 m.

d19: Dada una circunferencia de radio 4 cm, se traza desde un punto fijo exterior a ella una secante con la condición de que el área del triángulo tiene por vértice el centro de la circunferencia y los dos puntos en que la secante corta a la misma sea máxima. Se pide hallar dicha área. (SM, p. 138).

Más complicados son aquellos en los que interviene la circunferencia como figura geométrica:

d20: En una circunferencia de radio r se consideran dos arcos sucesivos cuya suma es un cuadrante y cuyos ángulos centrales respectivos miden α y $\pi/2 - \alpha$, ($0 \leq \alpha < \pi/2$). Hallar:

- a) El máximo de la suma de sus cuerdas.
- b) El máximo del área del triángulo determinado por los extremos de dichos arcos. (SM, p. 139).

No es habitual este tipo de problemas que constituyen una herencia de los libros de la época anterior y en los que resulta más dificultosa su traducción a una función matemática por intervenir figuras circulares. Este problema está en el libro de SM en el que no hay ninguno resuelto, todos se proponen como ejercicios al lector.

4.2.2.5.- Definiciones.

Las definiciones de máximos y mínimo matemáticos que se incluyen en los libros analizados de este periodo son las siguientes:

d21: Se llama *máximo absoluto* de una función al mayor valor que puede tomar la función, y *mínimo absoluto* el menor valor que puede tomar la función.. (Edelvives, p. 145).

d22: Una función $f(x)$ tiene un máximo relativo en un puntos x_1 , cuando el valor $f(x_1)$ de la función es mayor que todos los valores $f(x_1 + \Delta x_1)$ próximos a él, ya sea Δx_1 positivo o negativo. (Edelvives, p. 146)⁸

d23: Se dice que la función $y=f(x)$ tiene un *máximo relativo* en el punto $x=a$ cuando

$$f(a \pm h) \leq f(a)$$

para h suficientemente pequeño. (TP, p. 148).⁹

d24: Una función definida en un segmento $[a,b]$ presenta un **máximo** en el punto x_0 interior al intervalo (a,b) , si existe un entorno E_{x_0} de x_0 incluido en (a,b) tal que: $x \in E_{x_0}$, infiere $f(x) < f(x_0)$.

⁸ Una función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en un puntos x_1 , cuando el valor $f(x_1)$ de la función es menor que todos los valores $f(x_1 + \Delta x_1)$ próximos a él, ya sea Δx_1 positivo o negativo. (Edelvives, p. 146).

⁹ Se dice que dicha función tiene un Mínimo relativo en $x=a$ cuando

$$f(a \pm h) \geq f(a)$$

para h suficientemente pequeño. (TP, p. 148).

d25: Es decir, la función $y=f(x)$ tiene un **valor máximo** en el punto x_0 , cuando en ese punto la función pasa de creciente a decreciente y es mayor que cualquier valor suyo inmediatamente precedente o siguiente. (SM, p. 111).¹⁰

En cada una de estas definiciones, implícitamente, aparece a través de los términos usados, el enfoque matemático que se le ha dado a cada uno de los conceptos del Análisis Matemático. Así, en el libro de Edelvives se parte del concepto de variable, a partir del que se define el concepto de función como **transformación** entre variables, todavía no se han introducido los conceptos típicos de la matemática moderna, de ahí la ausencia de los conjuntos, y por ello el concepto de límite se ha definido a través de las sucesiones, y el concepto de derivada a través del límite del cociente incremental (con Δx a partir de un punto x_1) apropiado. En este libro se distingue entre máximo-mínimo absolutos y relativos. Los primeros se refieren a una característica de un **valor puntual**, mientras que en la segunda es necesario el entorno en el que se encuentra el punto. La expresión clave en la primera definición es por tanto “mayor valor” y en la segunda “mayor que todos los valores próximos a él”.

En el texto piloto, la definición que se ha dado de función es la propia de la matemática moderna, es decir, como subconjunto de un producto cartesiano; se entiende, por tanto, la función como un objeto y no como una transformación o un proceso. Se ha dado una definición de límite topológica, usando entornos reducidos, y la definición de derivada es la correspondiente al límite del cociente incremental “con Δx ”. En la definición de máximo, se tiene en cuenta el entorno al que pertenece el punto “ a y $a+h$ ” y consideraciones **infinitesimales** “con h suficientemente pequeño”, con lo que la definición da lugar a un concepto de máximo como propiedad local de las funciones. En la misma definición, se incluye una desigualdad que caracteriza al máximo en relación con el entorno al que pertenece.

En el libro de SM se sigue un tratamiento similar al explicado en el párrafo precedente, haciendo un uso todavía más explícito de los entornos, pero la definición de función se refiere a una **correspondencia** entre conjuntos, y no un subconjunto del producto cartesiano, con lo cual se produce una cierta transferencia didáctica, ya que no es la definición propia de la matemática moderna pero si utiliza los conjuntos para poder establecer la definición. En cuanto a la definición de límite, es la métrica, y la de derivada es la de cociente incremental (con h). La definición de máximo-mínimo que hemos recogido de este libro, utiliza los entornos que se representan a partir de los símbolos como Ex_0 o (a,b) , pero además incluye otra definición de máximo en la que se considera el “valor” máximo como una **propiedad** de las funciones, que relaciona con el crecimiento y decrecimiento de la función correspondiente; en este caso se hace referencia al aspecto gráfico de la función. Ésta es la definición que hemos encontrado en los libros de

¹⁰ Una función definida en un segmento $[a,b]$ presenta un **mínimo** en el punto x_0 interior al intervalo (a,b) , si existe un entorno Ex_0 de x_0 incluído en (a,b) tal que: $x \in Ex_0$, infiere $f(x) > f(x_0)$. Es decir, la función $y=f(x)$ tiene un **valor mínimo** en el punto x_0 , cuando en ese punto la función pasa de decreciente a creciente y es menor que cualquier valor suyo inmediatamente precedente o siguiente. (SM, p. 111).

matemáticos del siglo XVIII, a partir de la cual se deduce que la tangente en ese punto ha de tener pendiente cero.

Las definiciones relativas a los puntos de inflexión son las siguientes:

d26: *Se denomina punto de inflexión aquel en que tiene lugar el cambio de sentido de la concavidad de una curva*, es decir, al punto en que la curva deja de ser cóncava hacia las Y positivas para pasar a serlo hacia las Y negativas, o viceversa. (Edelvives, p. 159).

d27: Hemos visto en un ejemplo anterior que la tangente puede atravesar la curva. El punto de contacto se denomina, según se indicó anteriormente, *punto de inflexión*. (TP, p. 154)

d28: Puntos de inflexión de una curva son aquellos puntos de la curva que separan arcos convexos de arcos cóncavos. (SM, p. 114).

En las definiciones anteriores, observamos una gran similitud entre los libros de Edelvives y de SM, a pesar de la diferencia de tratamiento de los conceptos relativos al Análisis Matemático, de forma que la definición que se propone para dicho concepto, es la misma que la utilizada por los matemáticos en el siglo XVIII: el cambio de convexidad. Se considera pues la existencia de los puntos de inflexión como una propiedad relativa a las funciones que hace referencia al aspecto del grafo de la función, de hecho en el libro de SM en lugar de utilizar la expresión “punto de inflexión de una función”, se utiliza la expresión “punto de inflexión de una curva”, y en el libro de Edelvives, también se expresa como “el punto de la curva que...” . La definición del texto piloto es diferente, hace referencia a la posición de la tangente en dicho punto, aunque también hace referencia a la existencia de una curva, y, evidentemente, se puede deducir el cambio de convexidad.

4.2.2.6.- *Descripciones de procesos o reglas.*

Para facilitar el cálculo de máximos, mínimos y puntos de inflexión, en todos los libros se incluyen **descripciones de reglas** que permiten resolver los ejercicios y problemas propuestos de forma sistemática, eficiente y segura. Se debe resaltar la gran similitud que existe de nuevo entre los libros de SM y de Edelvives. Uno de los objetivos comunes es, por tanto, adquirir la mayor habilidad y precisión en la resolución de este tipo de ejercicios. Constituyen este tipo de descripciones, una suerte de algoritmos que suplen el que las operaciones realizadas en Análisis Matemático sean de tipo analítico en vez de algebraico, que es a lo que están acostumbrados los alumnos. Podemos observar claramente la similitud de la formulación de estas reglas en los distintos libros para calcular los máximos y mínimos de una función, siendo el libro de SM el que resulta más exhaustivo:

d29: Para hallar los máximos y los mínimos de una función $f(x)$:

1º. Se halla su primera derivada, se iguala a cero y se determinan los valores de x que la anulan.

2º Se calcula la derivada segunda y se reemplaza en ella x por los valores que anularon la derivada primera. Los que la hagan negativa producen máximos en $f(x)$; y los que la hagan positiva, mínimos.

Si $f''(x)=0$, o no existe, se halla $f'(x)$ primero para un valor de x muy poco inferior y luego para un valor de x muy poco superior a cada una de las raíces reales que anulan a

$f'(x)$. Hecho esto, si $f'(x)$ pasa de positiva a negativa, existe un máximo; si $f'(x)$ pasa de negativa a positiva, existe un mínimo; si $f'(x)$ no cambia de signo, habrá un punto de inflexión. (Edelvives, p. 149)

d30: Luego la regla práctica para investigar los valores máximos y mínimos es:

Paso primero: Halla la primera derivada de la función dada.

Paso segunda: Iguala a cero esta primera derivada y resuelve la ecuación obtenida para hallar sus raíces reales.

Paso tercero: Halla la derivada segunda.

Paso cuarto: Sustituye en ésta, cada raíz real de la derivada primera. Si el resultado es negativo, la función tiene un máximo para esa raíz real; si el resultado es positivo, la función tiene un mínimo.

Cuando $f''(x)=0$ o no existe, da el

Paso quinto: Calcula $f'(x)$ primero para un valor muy poco inferior y luego para un valor muy poco superior a cada una de sus raíces reales que anulan a $f'(x)$. Si $f'(x)$ pasa de positiva a negativa, existe un máximo; si $f'(x)$, pasa de negativa a positiva, existe un mínimo.

El método de la derivada segunda, generalmente, es más corto. Y si hubiera que dar el paso quinto, por las razones indicadas o porque el proceso de hallar la derivada segunda es demasiado largo, es conveniente descomponer $f'(x)$ en factores antes de calcularla. (SM, 113-114).

El texto piloto, presenta las reglas de una forma más axiomática y característica de las formulaciones típicamente matemáticas: impone las condiciones que ha de verificar la función para poder calcular los límites (una función cuya derivada sea nula,... en cierto entorno de a y para todo valor de x , distinto de a las derivadas primera y segunda, son distintas de cero) y luego expone las conclusiones. Además, cuando la segunda derivada se anula, a diferencia de los otros libros en los que se propone un estudio local en el entorno del punto, en el texto piloto se hace referencia a las derivadas sucesivas, es decir, si alguna de las derivadas impares-pares es distinta de cero.

d31: Sea $y=f(x)$ una función cuya derivada se anula en $x=a$. Supondremos que en cierto entorno de a ($a-h$, $a+h$), y para todo valor de x distinto de a , las derivadas $f'(a)$ y $f''(a)$ son distintas de cero.

... Resulta por tanto:

1º $f''(a)<0$. La función presenta un máximo en $x=a$.

2º $f''(a)>0$. La función presenta un mínimo en $x=a$.

Si $f''(a)=0$. hay que recurrir a derivados de orden superior. (TP, p. 152-153)

Las reglas para calcular los puntos de inflexión son las siguientes, aunque en el texto piloto no hay ninguna regla específica:

d32: Para determinar el punto o puntos de inflexión de una función $f(x)$:

1º Se halla la derivada segunda $f''(x)$, se iguala a cero y se resuelve la ecuación que resulta.

2º Se calcula la derivada tercera $f'''(x)$ y se reemplaza en ella x por las raíces de la ecuación anterior. Si para algunos de estos valores no se anula $f'''(x)$, la función $f(x)$ tendrá uno o más puntos de inflexión.

Si $f'''(x)$ es difícil de hallar, o no existe, o se anula para las raíces de $f''(x)$, se calcula $f''(x)$ primero para un valor de x muy poco inferior, y luego para un valor de x un poco superior a cada una de las raíces reales de $f''(x)$, y si ésta cambia de signo, hay un punto de inflexión. (Edelvives, p. 160).

d33: Esta regla permite al mismo tiempo calcular el sentido de curvatura.

Paso primero: Halla $f''(x)$

Paso segundo: Haz $f''(x)=0$ y resuelve la ecuación resultante para hallar sus raíces reales.

Paso tercero: Halla $f'''(x)$. Sustituye en ésta las raíces reales de $f''(x)$. Si $f'''(x)>0$, hay un punto de inflexión y en éste la curva pasa de convexa a cóncava; si $f'''(x)<0$ hay un punto de inflexión y en éste la curva pasa de cóncava a convexa. Si $f'''(x)=0$ no sabemos si hay punto de inflexión.

Si $f'''(x)$ es difícil de hallar, o no existe, o se anula para las raíces reales de $f''(x)$, entonces da el

Paso cuarto: Calcula $f''(x)$ para un valor muy poco inferior y luego para un valor un poco superior a cada una de las raíces reales $f''(x)$, y si ésta cambia de signo hay un punto de inflexión.

Cuando $f''(x)$ sea >0 la curva es convexa.

Cuando $f''(x)$ sea <0 la curva es cóncava.

(SM, pp. 114-115).

Se observa la similitud con las reglas del cálculo de máximos y mínimos aunque en esta ocasión también en el texto de Edelvives se incluye la procedencia de realizar un estudio local, cuando la tercera derivada sea cero, no exista o sea difícil de calcular.

4.2.2.7.- Teoremas.

Las reglas que se han formulado para el cálculo de máximos y mínimos provienen de **teoremas** que las fundamentan como:

d34: La condición necesaria para que una función derivable $f(x)$ tenga un máximo o un mínimo relativos en un punto x_1 , es que la derivada $f'(x_1)$ en ese punto sea igual a cero. Gráficamente, esta condición se cumple cuando la tangente a la curva representativa de la función, en el punto x_1 , es paralela al eje de abscisas. (Edelvives, p. 147)¹¹.

d35: Para que haya un máximo en un punto x_0 es condición necesaria y suficiente que la derivada primera sea nula y la derivada segunda sea negativa. (SM, p. 111).

d36: La condición necesaria para que un punto x_1 de una curva sea de inflexión es que en él se anule la derivada segunda, $f''(x_1)=0$. (Edelvives, p. 159)

¹¹ En esta proposición se da primero la regla que debe cumplir el máximo para poder calcularlo y luego se interpreta gráficamente cuando la tangente es paralela al eje de abscisas. Esto es justo lo contrario del sistema que tenían en los libros clásicos de historia de la matemática, primero se daba la condición gráfica que se debía cumplir y luego se averiguaban las condiciones para calcular los puntos. Esto quizás tenga que ver con la sintaxis en cuanto al orden en que aparecen las dos frases, o en la pragmática porque lo que interesa es saber calcular, más que interpretar.

En ellos se reconoce la formulación característica de este tipo de descripciones mediante el uso de expresiones como “la condición necesaria”, “la condición necesaria y suficiente” que no son siempre entendidas por los alumnos y una formulación con un gran grado de abstracción con términos exclusivamente matemáticos como función derivable, máximo y mínimos relativos, la derivada en un punto, la primera/segunda derivada,...

Unidad de información	Edelvives				Texto Piloto				Carranza			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
d1, d10	T1	T6	E11	T16								
d2, d3					T1	T6	E11	T16				
d4, d5, d7									T1	T6	E11	C16
d6	T1	T6	T11	T16								
d8	T1	E6	E11	T16								
d9									T1	T6	E11	T16
d11, d12									T1	T6	T11	T16
d13, d14	E1	E6	E11	E16								
d15	T1	E6	T11	E16								
d16, d17, d18, d19									T1	E6	E11	E16
d20									E1	E6	E11	E16
Carácter	T	E/T	E/T	E/T	T	T	E	T	T	E/T	E	E/T/C
d21	E2	E7	E12	T17								
d22	T2	E7	E12	T17								
d23					T2	T7	E12	T17				
d24									T2	T7	E12	T17
d25									E2	E7	E12	E17
d26	E2	C7	E12	E17								
d27					E2	C7	E12	E17				
d28									E2	C7	E12	E17
d29	T2	T7	T12	E17								
d30									T2	T7	T12	E17
d31					T2	T7	T12	T17				
d32	T2	T7	T12	E17								
d33									T2	T7	T12	E17
d34, d36	T2	T7	E12	E17								
d35									E2	T7	E12	E17
Caracter	E/T	E/T	E/T	E	E/T	T/C	E/T	E/T	E/T	T	E/T	E

Tabla 4.2.1: Descripciones de los libros del periodo 67-75

4.2.3.- Tablas

En cuanto a las tablas, hemos recogido aquéllas que se utilizan como herramienta para representar gráficamente las funciones, y que entre otras características y elementos de la función, resaltan también los máximos, mínimos y puntos de inflexión que poseen dichas funciones.

4.2.3.1.- Tablas de descripción local.

Unas de las tablas presenta, a modo de resumen, los cálculos realizados con anterioridad en relación con la derivada primera y segunda de una determinada función, son las que hemos llamado tablas de descripción local y se encuentra en el libro de Edelvives. En ellas no sólo se incluyen datos numéricos sino también ciertas propiedades de las curvas expresadas mediante el término correspondiente. Son tablas en las que, además del lenguaje matemático simbólico, es decir, símbolos numéricos y algebraicos, se incluyen palabras propias de la lengua vernácula. Los dos símbolos algebraicos utilizados son los correspondientes a las operaciones de adición y sustracción, pero ahora con un significado distinto, el + se utiliza para representar que en un cierto intervalo la función es creciente (por asociación, puesto que en este caso la derivada es positiva en dicho intervalo) y el – para representar que en otro intervalo la función es decreciente (ya que de forma similar la derivada es negativa en este intervalo). Los términos que se suelen incluir son: convexidad, concavidad, máximo, mínimo, punto de inflexión, crecimiento y decrecimiento. Se incluyen asimismo llaves que resaltan el carácter de resumen o esquema de los resultados obtenidos en los cálculos anteriores.

Resumen de los resultados obtenidos

x	$y' = -2\sin 2x$	$y' = -4\cos 2x$	$y = \cos 2x$
0	0	-4	1 (máximo)
...	-	-	
$\frac{\pi}{4}$	-2	0	0 (inflexión)
...	-	+	
$\frac{\pi}{2}$	0	+4	-1 (mínimo)
...	+	+	
$\frac{3\pi}{4}$	+2	0	0 (inflexión)
...	+	-	
π	0	-4	1 (máximo)

t1: (Edelvives, 168)

Otras tablas de este tipo que se incluyen en el libro de Edelvives, están relacionadas con las funciones $y = x^4 - 8x^2 + 7$, $y = \frac{3^x}{4}$, $y = \log_a x$, $y = \cos 2x$.

4.2.3.2.- Cuadros variacionales.

Otras tablas, que hemos llamado cuadro de variación, enfatizan que, lo que se representa en la tabla, es el carácter variacional de la función. Este tipo de tablas son las que se incluyen en el libro de SM, y se utilizan en la representación gráfica de funciones, cuando se han calculado los intervalos de variación de dicha función a través de las derivadas primera y segunda. En ellas, sólo se incluyen términos matemáticos: números, signos de operaciones aritméticas (en este caso se refieren al signo de la derivada en un

punto que implica crecimiento, en el caso de +; o decrecimiento en el caso de -) y flechas que indican el crecimiento/decrecimiento. El símbolo 0 indica en este caso, no sólo que la derivada en ese punto es cero, sino que como consecuencia, tendremos un extremo en dicho punto, podemos considerarlo por lo tanto como un **índice** de ese tipo de puntos, al igual que los símbolos + y -.

Cuadro de variación¹²:

x	2		4	
f'(x)	0		+	0
f	2-	-1	3	2+

t2: (SM, p. 133)

Estas tablas se han utilizado en la representación gráfica de las funciones:
 $f(x) = \frac{x+4}{2x-2}$ y $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$, ambas funciones algebraicas.

En el texto piloto no hay ninguna tabla.

Unidades de información	Edelvives				Texto piloto				SM			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
t1	T3	C8	T13	T18								
t2									C3	T8	T13	T18
-					E3	E8	E13	E18				
Carácter	T	C	T	T	E	E	E	E	C	T	T	T

Tabla 4.2.2: Tablas de los libros del periodo 67-75

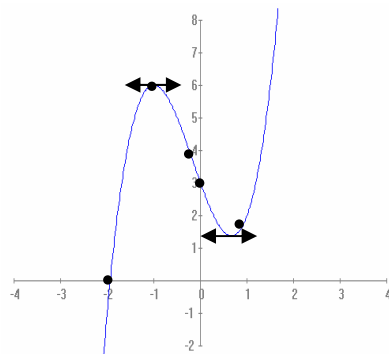
4.2.4.- Gráficas.

4.2.4.1.- Ábacos.

Entre las gráficas que hemos denominado ábacos, tenemos las que se utilizan para mostrar cómo construir la representación gráfica de una función continua o discontinua a partir de un número discreto de valores de la función, que vienen dados como una tabla numérica. Para ello, primeramente se ubican los puntos en el plano cartesiano, y luego se unen mediante una línea curva como se indica expresamente en algunos de los textos. Los puntos que se utilizan para representar gráficamente la función, aparecen resaltados mediante “puntos gordos”. En la siguiente gráfica, se representan los cortes con los ejes, el máximo y el mínimo, y el punto de inflexión. Los puntos extremos se resaltan mediante una tangente horizontal y, para resaltar que es una línea recta, se incluyen flechas en ambos sentidos, que sugieren la prolongación hacia la derecha y la izquierda.

¹² La función que se representa es $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$

Hallar máximos, mínimos y puntos de inflexión y construir la curva de ecuación $y=2x^3+6x^2-4x+3$



g1: (SM, pp 115-116)

Estos ábacos se han utilizado en el libro de SM para representar otras funciones como: $y=2/3(x^3-3x^2)$, $y=3x^5-5x^3$, $y=1/2x^4-3x^2+2$.

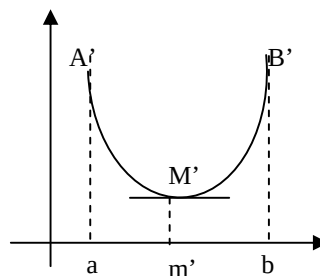
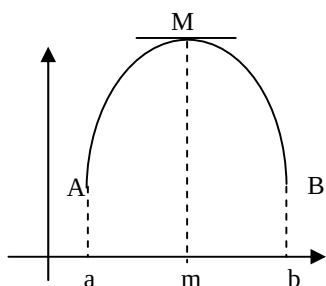
4.2.4.2.- Ideogramas.

Otro tipo de gráficas que hemos encontrado en los libros de texto de este periodo, es el que llamamos ideogramas locales, que presentan propiedades locales de funciones generales de forma muy esquemática. Dichas propiedades se ponen de manifiesto mediante la utilización en la gráfica de líneas de puntos, segmentos que centran la atención en cierta parte del espacio plano que ocupa la gráfica, por ejemplo, en la señalización de máximos o mínimos absolutos o relativos, mediante segmentos tangentes horizontales en dichos puntos, y una línea de puntos, para asociarlos con la abscisa correspondiente, valor en el cuál la función tiene el máximo o mínimo.

Supongamos representado en la figura el intervalo (a, b) de una función con un máximo en M .

Vemos que la función es creciente en el arco AM y, por consiguiente, en todos sus puntos la derivada $f'(x)$ será positiva; por el contrario, en el arco MB la función es decreciente y, en consecuencia, la derivada $f'(x)$ será negativa en todos los puntos del mismo.

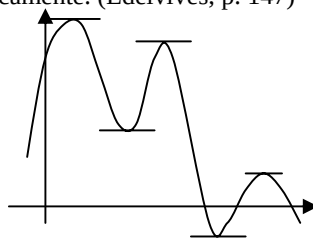
Ahora bien: si la derivada $f'(x)$ es continua, como primero es positiva y luego negativa, tiene que pasar por todos los valores intermedios, es decir, necesariamente habrá de anularse, lo que ocurrirá precisamente en el punto M , ya que en él la función $f(x)$ no es creciente ni decreciente.



g2, g3: (Edelvives, p. 147)

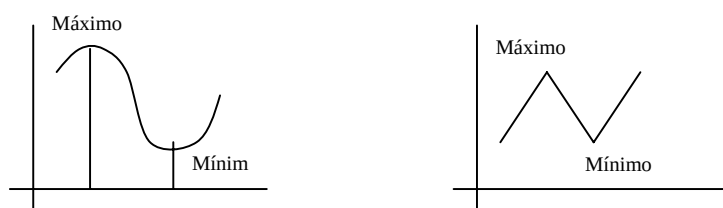
Si existe un mínimo en el punto M' , el proceso es análogo, aunque en orden inverso (Edelvives, p. 147)

Una función puede tener un máximo y un mínimo relativos a la vez, y hasta varios máximos y mínimos relativos; en este último caso, puede ocurrir que un máximo sea menor que un mínimo y recíprocamente. (Edelvives, p. 147)



g4: (Edelvives, p. 147)

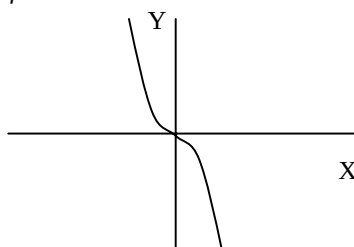
En el texto piloto, se representa mediante este tipo de gráficas, tanto el caso en que la función es derivable, como el caso en que no lo sea, indicando que, a pesar de ello, la función sigue teniendo máximo y mínimo. Esta situación está relacionada con la definición que se dio en este libro de máximo y mínimo, en la que la condición necesaria de extremo se expresaba bajo la suposición de que la función fuera derivable. El caso en que la función no sea derivable, no implica que no puedan existir ese tipo de números, pero su identificación tendrá que llevarse a cabo de una forma alternativa.



g5, g6: (TP, p. 149)

Un ideograma también puede representar un punto de inflexión, del que hemos encontrado dos gráficas idénticas en los libros de SM y en el texto piloto.

Como el eje X es tangente a la curva en este punto y la atraviesa, se dice que la curva tiene en $(0,0)$ un punto de *inflexión*.

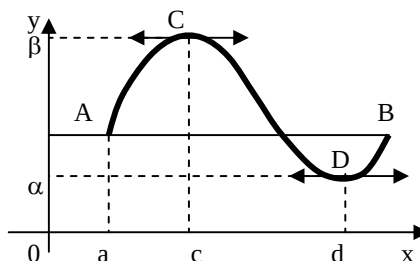


g7: (TP, p. 150 y SM, p. 111)

Tenemos, además, una imagen gráfica del teorema de Rolle, donde los puntos a y b , tienen la misma imagen $A=B$ que se resalta mediante una línea horizontal que engancha con el eje de ordenadas, indicando su imagen. Los puntos máximo C , y mínimo D ,

corresponden a los que tienen la tangente horizontal, indicándose mediante líneas punteadas el punto del plano al que corresponden.

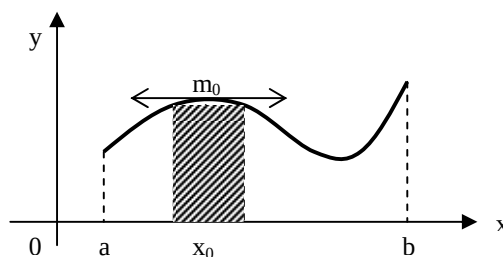
Sea (ab) el arco de curva $y=f(x)$ correspondiente al segmento $[a, b]$. Según el teorema de Rolle, si $f(a)=f(b)$, existe en el arco (AB) un punto C donde la tangente es paralela a Ox , por tanto paralela a la cuerda AB .



g8: (SM, p. 124)

4.2.3.3.- Mensajes topológicos.

Entre las gráficas que hemos llamado mensajes topológicos, en el libro de SM incluye algunas para representar máximos y el mínimos. En estas gráficas se resaltan mediante regiones sombreadas el intervalo que se está considerando. Esta representación, al igual que la del texto piloto, es acorde con la definición que se da de puntos extremos, en la que se hace referencia explícita a los entornos del punto.



g9: (SM, p. 111)

La tabla que resume las características de las gráficas de este periodo, es la siguiente:

Unidades de información	Edelvives				Texto piloto				SM			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
g1									E4	T9	C14	E19
g2, g3	E4	C9	C14	E19								
g4	E4	C9	E14	E19								
g5, g6					E4	C9	E14	E19				
g7					C4	C9	C14	E19				
g8									E4	C9	C14	E19
g9									E4	E9	C14	E19
Caracter	E	C	E/C	E	E/C	C	E/C	E	E	E/T/C	C	E

Tabla 4.2.3.- Gráficas de los libros del periodo 67-75

4.2.5.- Expresiones simbólicas.

Hay una gran variedad de expresiones simbólicas de funciones, sobre todo en el libro de Edelvives, en el que se plantean para hacer sus representaciones gráficas. En el texto piloto, hay pocas expresiones algebraicas, ya que se trata de un libro de tipo más bien teórico en el que no hay ejercicios, sólo algunos ejemplos, y no se trata, por lo tanto, de practicar las reglas aprendidas. Mientras que el anterior es un libro de corte tecnicista (hay numerosos ejercicios en los que practicar las técnicas estudiadas), éste es más bien teorista. Así sólo encontramos funciones polinómicas en los ejemplos que propone el libro. Dichas funciones se utilizan para mostrar el proceso de representación gráfica de funciones, de forma que todas las funciones son fácilmente factorizables, sus puntos de corte con los ejes, son fácilmente reconocibles y sus puntos críticos poseen coordenadas racionales, luego se localizan sin mayor dificultad. La cuártica, que puede resaltar por sus coeficientes racionales, se justifica ya que al derivar se eliminan, es decir, la expresión está estudiada de antemano. Todo ello recalca el carácter teórico del citado libro. En cuanto al libro de SM, no tiene la gran cantidad de variedades de funciones y de posibilidades dentro de cada variedad pero presenta algunas representaciones insólitas.

4.2.5.1.- Expresiones algebraicas polinómicas.

- Algunas funciones **cuadráticas** particulares o familias de funciones:

e1: $y=12x^2-6x$, $y=x^2+1$, $y=-x^2+3$, $y=x^2-2x+2$, $y=3x^2+2x+1$ (Edelvives, pp. 169-170)

$y=x^2-4x-5$ (SM, p. 134)

e2: $y=ax^2+bx+c$, $y=x^2+px+q$ $y=ax^2+bx+6$ (Edelvives, pp. 169-170)

- La mayoría son **cúbicas** ya que suelen tener máximo, mínimo y punto de inflexión, y el grado de la función no es muy alto para poder resolver las ecuaciones pertinentes:

e3: $y=x^3-3x^2-45x+2$, (Edelvives, p. 148); $y=2x^3-24x+7$, $y=2x^3-21x^2+72x+1$, $y=x^3-9x^2+24x-18$, $y=x^3-3x^2-9x+9$, $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+1$, $y=x^3+3x^2-9x-7$, $y=x^3-3x^2+2x$, $y=x^3-2$, $y=-x^3+2x$, $y=x^3-x^2+x-1$, $y=2x^3-9x^2+24x$ (Edelvives, pp. 169-170)

$y=3x^3-4x^2-x$; $y=x^3-2x^2$; $y=x^3-3x+2$ (TP,)

$y=2x^3+x^2-4x+3$; $y=2x^3-6x^2+7x-3$; $y=3/2(x^3-3x^2)$; $y=x^3-6x^2+15x-8$ (SM, p. 135)

e4: $y=ax^3+bx^2+cx+d$ que admite el máximo $y=1$ y el mínimo $y=-2$ para $x=2$ (SM, p.135)

- Cuárticas.

e5: $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}$ (TP,)

- Y otras **bicuadradas** que también ofrecen distintas posibilidades:

e6: $y=x^4-13x^2+3$; $y=x^4-8x^2+7$; $y=x^4-6x^2+9$, $y=x^4-16$; $y=x^4-5x^2+4$ (Edelvives, pp. 169-170)

$y=1/2x^4-3x^2+2$ (SM, p. 134)

- Quínticas:

e7: $y=3x^5-5x^3$ (SM, p. 134)

De esta última función decir que resalta la alternancia de parámetros y exponentes, la representación gráfica que es simétrica respecto del origen de coordenadas y la simetría también de los puntos críticos. Al igual que en el texto piloto la elección de este tipo de funciones se debe a un criterio auténticamente teórico más que práctico.

4.2.5.2.- Expresiones polinómicas factorizadas.

Facilitan el cálculo de los cortes con los ejes y la posterior derivación para calcular máximos y mínimos:

e8: $y=x(x-1)^3$, $y=(3-x)^2(x-2)$, $y=(x^2-x+1)(x-2)$ (Edelvives, p. 170)

4.2.5.3.- Expresiones algebraicas racionales.

Algunas de estas funciones no tienen asíntotas, y el resto es fácilmente factorizable para localizarlas. Hay algunas que representan una única función, y otras representan toda una familia.

e9: $y = \frac{1+x}{x}$; $y = \frac{2x}{x-2}$; $y = x + \frac{1}{x}$; $y = \frac{x+1}{x-1}$; $y = \frac{x}{x^2+1}$; $y = x - 1 + \frac{2}{x}$;

$y = \frac{10(x-4)}{x^2-9}$; $y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$; $y = \frac{x^2}{x^2+x+2}$; $y = \frac{x^2-1}{(x-2)^2}$; $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

(Edelvives, p. 170)

$y = \frac{2x-7}{x^2+8}$; $y = \frac{x^3-16}{x^2+4}$; $y = \frac{h+3x-x^2}{x-4}$ que tenga un máximo y un mínimo, que

tengan una diferencia de 8 unidades (SM, p. 139)

e10: $y=x+a+\frac{b}{x}$, con un máximo de 80 unidades y un mínimo de -16

4.2.5.4.- Expresiones algebraicas irracionales.

En el libro de Edelvives se varían las distintas posibilidades existentes, a partir de un mismo radicando ($1-x^2$). En el libro de SM sólo hay una función de este tipo, que resulta

ciertamente extraña ya que no sólo resulta complicada al ser un cociente de raíces, sino que además se expresa en función de y en lugar de función de x como es habitual:

$$\text{e11: } y = \sqrt{1-x^2} ; y = \sqrt{x^2-1} ; y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} ; y = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ (Edelvives, p. 170)}$$

$$x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}} \text{ (SM, p. 137)}$$

4.2.5.5.- Expresiones trascendentes exponenciales.

No sólo funciones exponenciales sino también diferentes funciones potenciales:

$$\text{e12: } y = e^x(2x^2+x-8); y = \frac{3^x}{4} ; y = \frac{2^x}{5} ; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ (Edelvives, p. 170)}$$

$$\text{e13: } y = xe^{kx} \text{ (Edelvives, p. 170)}$$

4.2.5.6- Expresiones trascendentes logarítmicas.

En el libro de Edelvives es en el que más variedad hemos encontrado

$$\text{e14: } y = \log_a x; y = \log(1+x); y = \ln(x-1) \text{ (Edelvives, p. 170)}$$

$$y = \ln \frac{6+x-x^2}{4} \text{ (SM, p.138)}$$

4.2.5.7.- Expresiones trascendentes trigonométricas

Se consideran prácticamente todos los tipos de funciones trigonométricas:

$$\text{e15: } y = \sin x; y = \cos 2x; y = \sin 2x; y = \cos x; y = \operatorname{tg} x; y = \operatorname{cotg} x; y = \arcsin x; y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x; y = \cos x + \cos 2x. \text{ (Edelvives, p. 170)}$$

$$y = \sin^2 x \text{ (SM, p. 138)}$$

Unidades de información	Edelvives				Texto Piloto				SM			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SC	PD	SC
e1, e6, e11, e14	T5	T10	T15	T20					T5	T10	T15	T20
e2, e13	E5	T10	T15	T20								
e3	T5	T10	T15	T20	T5	T10	T15	T20	T5	T10	T15	T20
e4									E5	T10	T15	T20
e5					T5	T10	T15	T20				
e7									T5	T10	T15	T20
e8	T5	C10	T15	T20								
e9, e15	T5	C10	T15	T20					T5	C10	T15	T20
e10									T5	C10	T15	T20
e12	T5	T10	T15	T20								
Caracter	T	T/C	T	T	T	T	T	T	T	T/C	T	T

Tabla 4.2.4: Expresiones simbólicas de los libros del periodo 67-75

4.2.6.- Perfiles.

4.2.6.1.- Perfil de Edelvives.

El libro de Edelvives se ocupa de todos los conceptos incluidos en el currículo que corresponden a los programas de la matemática moderna, aunque es un libro en el que predominan las técnicas más que la teoría, y al que las nuevas corrientes epistemológicas y didácticas no han influido, de hecho, se puede considerar que constituye una herencia del periodo anterior. No hay ninguna referencia explícita que haga mención a algún aspecto de la sociedad del momento, pero si hay que resaltar la formulación de problemas físicos a los que en aquella época se les concedía una gran importancia. La influencia posterior de este libro fue nula, ya que se produjo una ruptura epistemológica de gran peso, que fue la de la matemática moderna.

Los términos intuitivos coexisten con otros más formales, pero hay que destacar que se hace más énfasis en el desarrollo de una técnica, que en la presentación formal de la teoría. Hay una gran cantidad de funciones diferentes, pero la mayoría son de tipo algebraico y no hay ninguna función especial o que se salga un poco de lo normal. La estructura de los enunciados es típicamente matemática, por lo que se mantiene fiel al rigor matemático, ya que se considera que esta disciplina es un área de conocimiento totalmente estructurada. No hay ninguna interacción entre diferentes sistemas de representación, se presentan de forma parcelada.

Los fenómenos presentados son muy diversos, perteneciendo a diferentes áreas de conocimiento, aunque los más abundantes son los estrictamente matemáticos. Los conceptos matemáticos aparecen totalmente parcelados, sin que haya relación o aportación de diferentes dominios. Como se pretende que los alumnos adquieran agilidad y precisión en los cálculos, predominan las tendencias algorítmicas tanto en relación con las interpretaciones como respecto de los resultados obtenidos.

La presentación de los conceptos es totalmente estática, los problemas son todos de tipo escolar, y las herramientas de la época están infrautilizadas sin que halla ni siquiera uso del color, imágenes,... en el libro. Incluso, no hay un equilibrio en las aplicaciones

presentadas entre los problemas de optimización y los referentes a la representación gráfica de funciones, siendo más abundantes éstas últimas.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema		*	
	Descripciones teóricas	*	*	
	Símbolos utilizados en las tablas		*	
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología	*	*	
	Tipos de descripciones	*	*	
	Tipos de tablas			*
	Tipos de gráficas			*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	*
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*	*	
	Papel de las definiciones	*	*	
	Actividades relacionadas con las tablas		*	
	Actividades gráficas	*		*
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum	*	*	
	Influencias didácticas	*		
	Aplicación de las tablas		*	
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.2.5 Perfil del libro de Edelvives

A la vista del perfil, hemos de deducir que el libro de Edelvives es un libro de carácter **tecnológico** que tiene ciertos aspectos expositivos, sobre todo en relación con la función o el papel que ejercen las representaciones a lo largo del texto y en cuanto a las connotaciones sociales de las diferentes representaciones utilizadas. Se nota un aumento, tanto de los tipos de fenómenos que se relacionan con los conceptos, como en las expresiones simbólicas utilizadas para calcular máximos y mínimos. Los aspectos más comprensivos todavía son muy reducidos, limitándose prácticamente a las representaciones gráficas, alguna tabla y a la gran variedad de expresiones simbólicas que se presentan en este libro.

4.2.6.2.- Perfil del texto piloto.

El texto piloto es un libro clásico, escrito por una comisión establecida para tal fin y que sigue fielmente las indicaciones de los programas escolares. En él influye claramente la corriente llamada de la “matemática moderna”, pudiendo considerarse este libro como el modelo que van a seguir la mayor parte de los libros de la época. Es un libro fundamentalmente teórico, de forma que apenas aparecen en él ejemplos, ejercicios y problemas, por lo que las referencias a elementos de la sociedad del momento son nulas.

Los términos usados como consecuencia de las influencias recibidas son totalmente formales, no dejando lugar a la expresión, siendo la estructura de los enunciados rigurosa y utilizando para ello tanto símbolos puramente matemáticos, como locuciones y expresiones

pertenecientes a la lógica matemática. Las funciones son muy escasas, la mayoría son funciones generales del tipo $f(x)$, y los pocos ejemplos que se exponen son todas expresiones polinómicas, es decir, puramente algebraicas. Por las mismas razones expuestas, no hay ningún tipo de interacción entre diferentes representaciones o sistemas matemáticos de signos, apareciendo, por lo tanto, cada uno de ellos de forma aislada y sin conexión, con lo que pierden bastante de su significado y de las interacciones que pudieran surgir entre ellas, de hecho se ha expuesto una forma alternativa de tratar el problema del cercado, utilizando diferentes sistemas de representación, para obtener una información global acerca de la situación planteada.

La fenomenología, como ya se ha indicado, es totalmente matemática: la matemática se encierra en sí misma y se explica por sí misma, incluso los diferentes conceptos matemáticos aparecen clasificados en diferentes áreas de forma que no se relacionan unas con otras, manteniéndolas totalmente separadas. No se hace ningún hincapié en las técnicas que debería aprender el alumno, sino más bien en cuestiones de tipo teórico, con lo que las interpretaciones y las soluciones no se centran tanto en los aspectos cuantitativos, como en relacionar dichos resultados con la teoría presentada.

La presentación es estática, los ejemplos están pensados totalmente para la práctica en el aula, así se ha analizado cómo la misma representación algebraica de las funciones está pensada en función de los cálculos que se hacen a posteriori. Solamente hay un uso del color azul para resaltar las representaciones gráficas, distinguir los diferentes apartados y los diferentes dibujos incluidos. Los conceptos de puntos máximos y mínimos sólo se utilizan en relación con los problemas de optimización.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema		*	
	Descripciones teóricas	*	*	
	Símbolos utilizados en las tablas	*		
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología		*	
	Tipos de descripciones		*	*
	Tipos de tablas	*		
	Tipos de gráficas			*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*		
	Papel de las definiciones	*	*	
	Expresiones relacionadas con las tablas	*		
	Actividades gráficas	*		*
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum		*	
	Influencias didácticas	*	*	
	Aplicación de las tablas	*		
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.2.6: Perfil del texto piloto

El texto piloto, como ya hemos comentado, es un libro de carácter **expositivo** en el que destacan el tipo de definiciones características de la matemática moderna y la ausencia de ejercicios y problemas, para practicar los conceptos o reglas. A pesar de ello, dado el tipo de concepto que hemos estado analizando, los puntos críticos, cuya inclusión en los libros de texto está fundamentada en la aplicación del concepto de derivada a diversas situaciones, hace que el tipo de definiciones y expresiones utilizadas en el libro, estén enfocadas hacia la aplicación del concepto y por esto se puede observar en la tabla anterior, que éste el perfil tiene también un carácter **tecnológico**. Los contextos son los grandes ausentes de este libro, se trata de desarrollar la matemática en sí misma.

4.2.6.3.- Perfil de SM.

El último libro de este periodo considerado, es el de la editorial SM, que incluye todos los aspectos especificados en los programas, considerándose, por tanto, que su adaptación a los programas oficiales es total. En él se nota una influencia de la matemática moderna pero también se incluyen numerosos ejercicios, que permiten practicar las reglas estudiadas, con lo que se puede considerar que es un libro intermedio entre ambas tendencias. Existen algunas referencias a la sociedad del momento, indicando, por ejemplo, el coste de la cerca de un solar, o utilizando para expresar el área de ese mismo solar, la unidad de medida “área” que hoy está en desuso. Se puede considerar que este libro va a influir en libros de la época siguiente, en los que se va a producir cierta reacción a la presentación teórica de las matemáticas, insistiendo bastante más en la práctica.

Los términos usados son totalmente formales, es decir, aunque se insiste en la aplicación de los conceptos, éstos se definen de una forma bastante más rigurosa que en el texto piloto. Da la impresión de que se quieren definir exactamente los conceptos de forma que no quede lugar a dudas en el momento de aplicarlos a situaciones problemáticas. Aunque hay alguna función de tipo trascendente, las mayoría son algebraicas, y alguna es un poco extraña.. Se cuida mucho, no sólo los términos que se usan para que sean totalmente precisos y no haya lugar a dudas, sino también la estructura de los enunciados, que es puramente matemática. La interacción entre los distintos sistemas de representación es muy escasa, limitándose a la presentación de algunos ejercicios en los que se describen diferentes características algebraicas de la función, para determinar la expresión adecuada que la define.

Aunque se consideran ámbitos diferentes de la propia matemática, es en ésta en donde se plantean la mayoría de las situaciones incluidas en los problemas y ejercicios, incluso los conceptos propios de las matemáticas aparecen parcelados. Como se hace énfasis en la adquisición de los algoritmos de cálculo, la mayoría de las interpretaciones y soluciones son cuantitativas.

Las presentaciones son estáticas, los problemas están pensados explícitamente para el entorno escolar, se usan algunas herramientas didácticas como uso de recuadros o utilización del color sepia que es muy típico de esta época. En este libro se puede considerar que hay un equilibrio entre los problemas de optimización y los referentes a la representación gráfica de funciones.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema		*	
	Descripciones teóricas	*	*	
	Símbolos utilizados en las tablas			*
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología	*	*	
	Tipos de descripciones		*	
	Tipos de tablas		*	
	Tipos de gráficas	*	*	*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	*
Pragmático- didáctica	Función de los ejercicios	*		
	Papel de las definiciones	*	*	
	Actividades relacionadas con las tablas		*	
	Actividades gráficas			*
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum	*	*	*
	Influencias didácticas	*		
	Aplicación de las tablas		*	
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.2.7: Perfil del libro de SM

Según el perfil de SM, se trata de un libro de carácter **tecnológico**, en el que las definiciones siguen un esquema de tipo expositivo, pero en el que hay numerosos ejercicios y problemas de carácter muy variado, tanto de aplicación de las reglas como de comprensión de los conceptos desarrollados, y en algunas dimensiones roza el carácter de tipo comprensivo.

4.3.- Desarrollo del plan de estudios del Bachillerato Unificado y Polivalente (B.U.P.) y del Curso de Orientación Universitaria: 1975-1995.

4.3.1.- Planes de estudio y libros de texto seleccionados.

A comienzos de la década de los setenta, se emprende en España una reestructuración del sistema educativo, que culmina con la aprobación de la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, promulgada el 4 de Agosto de 1970. Dicho sistema estaba organizado en diferentes niveles escolares según las edades de los alumnos: Enseñanza Preescolar (4-6 años), Enseñanza General Básica de carácter obligatorio (E.G.B. 6-14 años), el Bachillerato Unificado y Polivalente (B.U.P., 14-17 años), y el Curso de Orientación Universitaria (C.O.U., 18 años) necesario para acceder a los estudios universitarios. Los estudios de Bachillerato contenían materias comunes, materias optativas y enseñanzas y actividades técnico- profesionales y, su duración era de tres cursos académicos.

Las Matemáticas, en esta ley, fueron incluidas dentro del área de “Ciencias Matemáticas y de la Naturaleza”, sin embargo, en lo que se refiere al Bachillerato, hubo que esperar hasta el año 1975 a que se estableciera el currículo (Decreto del 23 de enero de 1975, desarrollado en el B.O.E. del 18 de Abril del mismo año) en el que las matemáticas tenían carácter de asignatura obligatoria en cada uno de los tres cursos de este nivel escolar, aunque posteriormente las del tercer curso pasaron a ser opcionales.

El programa que define cada una de las asignaturas de matemáticas de B.U.P., posee una orientación formalista y estructuralista, fundamentado en la consideración de que:

- Este nuevo programa de matemáticas escolares poseía un carácter científico completo y avanzado.
- La implantación de este tipo de programas en la mayoría de los países y salvo raras excepciones su aceptación es universal.
- La legitimación desde el punto de vista de la Psicología cognitiva, con la que se argumentó que la enseñanza de estructuras matemática a los niños y adolescentes, respondía a una teoría moderna de la aprendizaje de carácter evolutivo.

Así, en Rico y Sierra (1997) se dice: “Tenemos pues que en los años setenta se produce en España una confluencia de intereses entre algunos profesores universitarios, ciertos responsables administrativos del diseño curricular y algunos psicólogos de la educación, quienes, con una considerable deficiencia de formación sobre el currículo de las matemáticas, sus problemas y limitaciones, establecen un programa de formación formalista desde preescolar hasta la universidad. La vigencia de este currículo la ciframos en veintidós años y su periodo de influencia indiscutible se sitúa en la década de los setenta”. Por ello, salvo algunas excepciones, el programa de la matemática moderna se recibió acríticamente y se incorporó al sistema educativo sin una reflexión sobre las necesidades educativas del momento.

Los contenidos de Análisis correspondientes a cada uno de los cursos de Bachillerato son los siguientes:

Primer curso

- Funciones polinómicas. Representación gráfica.

Segundo curso

- Límite de sucesiones. El número e . Cálculo de límites.
- Función real de variable real. Límite y continuidad.
- Funciones exponencial y logarítmica. Representación gráfica y propiedades.
- Funciones circulares. Representación gráfica y propiedades.
- Concepto de derivada. Función derivada. Primitivas de una función.

Se considera este segundo curso una iniciación al Análisis, con este fin se estudian:

- “Los conceptos básicos de continuidad y límite.

Las funciones no algebraicas.

Las nociones de derivada y función primitiva.

El concepto de límite convendrá introducirlo en su forma métrica; el cálculo de límites debe reducirse a casos sencillos.

Las funciones circulares se definirán como razones, completando su estudio en el curso siguiente.

En el estudio de las funciones exponencial y logarítmica se darán sus propiedades fundamentales.

El estudio de la derivada y de las funciones primitivas se limitará a los conceptos, interpretaciones y algunos ejemplos sencillos, fundamentalmente el concepto de tangente” (B.O.E. 18 de abril de 1975).

Tercer curso

- Cálculo diferencial. Aplicaciones.

Cálculo integral. Aplicaciones.

En este curso se profundiza en las nociones de Análisis:

“Adquirir destreza en la aplicación de las reglas de cálculo diferencial;

Conseguir un conocimiento suficiente de la significación de la derivada y función primitiva en los fenómenos naturales.

Como aplicación del cálculo diferencial, se hará el estudio local de las funciones. Podría completarse este estudio con algunos teoremas relativos a las funciones continuas y derivables.

Se aprovechará el estudio anterior para llegar a la representación gráfica de funciones algebraicas y trascendentes elementales.

El cálculo de funciones primitivas se hará para integrales inmediatas y algunos ejemplos sencillos por los métodos de descomposición y partes. Podría introducirse el concepto de integral definida para funciones escalonadas o funciones monótonas. Además de las aplicaciones geométricas del cálculo integral se podrán plantear problemas de aplicación física o técnica”.

Durante esta época se produce una gran expansión editorial, consolidándose el paso de los libros de autor a los libros de editorial. Los libros que se han seleccionado para realizar el análisis, corresponden a los siguientes grupos¹³:

- Algunos autores que han editado libros durante el periodo anterior, continúan escribiendo textos, en los que se observan ligerísimas modificaciones. Siguen la línea marcada por los textos piloto, pudiendo considerarse que, aunque amplían los contenidos respecto de la época anterior, son un punto de continuidad que enlaza ambos periodos. Dentro de este grupo hemos analizado el libro:

Autor: F. Marcos de Lanuza.

Título: Matemáticas 3º B.U.P.

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1978, G del Toro, Madrid

Localización del manual utilizado: Biblioteca Facultad de Educación

¹³ Estos grupos constituyen uno de los resultados de una investigación previa financiada por el C.I.D.E. (B.O.E. 19/8/95) llamada *Los conceptos de límite y continuidad en la educación secundaria transposición didáctica y concepciones de los alumnos*, una parte de la cual, ha sido publicada en Sierra, González y López (1999).

Este libro, sigue las orientaciones del texto piloto analizado en el periodo anterior, con lo que se sitúa claramente dentro de la corriente de la Matemática Moderna. La estructura del libro es clásica, introduciendo los conceptos por medio de definiciones, que se aplican posteriormente a algún ejemplo típicamente matemático. Al final de cada lección, hay una colección de ejercicios para aplicar los conocimientos adquiridos. Al contrario que en el resto de los libros de este periodo, no se presenta ninguna aplicación de los conceptos de puntos críticos, con lo cual el tratamiento es puramente formal.

- Una gran cantidad de editoriales, proponen desarrollos curriculares en Matemáticas en consonancia con la recién estrenada Ley General de Educación, con lo que en estos libros se puede observar una marcada tendencia hacia la matemática moderna. Dentro de este grupo se ha elegido el libro:

Autor: Javier Etayo, José Colera y Andrés Ruiz.

Título: Matemáticas 3º B.U.P.

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1977, Anaya, Salamanca

Localización del manual utilizado: Biblioteca personal

La corriente predominante que marca la presentación de los contenidos en este libro, está ligada a la llamada Matemática Moderna, poniendo el énfasis en las estructuras lógicas, aunque introduciendo, como en muchos libros de ésta época, algunas aplicaciones. De esta forma podemos observar un deslizamiento hacia la manipulación de símbolos y aspectos puramente formales, de tal forma que se oscurece la mayoría de las veces el significado de los conceptos.

La línea editorial que marca el planteamiento de los contenidos en este libro, se basa en la consideración de las matemáticas como un edificio de conocimientos que se apoya en los anteriores, de tal forma que se sigue una estructura cíclica a partir de aprendizajes previos, con lo que se persigue una estructura global de las matemáticas. Este modo de hacer está en consonancia con los usos didácticos de la época y el sistema de evaluación continua estipulado por la L.G.E.

Destaca el papel de las definiciones, que según se indica en el texto, “es algo que señala de modo único a un concepto y solamente a él”, aunque no sólo hay que aprenderla de memoria, sino saber aplicarla. Para ello, se presentan, inmediatamente después de enunciar los conceptos matemáticos, numerosos ejercicios, con el objeto de comprobar si se ha entendido la definición. Se trata fundamentalmente de un adiestramiento en las técnicas calculísticas y de aplicación formal de las matemáticas. Al final de cada capítulo, aparecen también numerosos ejercicios de revisión, recapitulación y ampliación.

Se pretende que los alumnos desarrollen capacidades relacionadas con: el aprendizaje las definiciones, tanto desde el punto de vista verbal como desde el simbólico, la manipulación de símbolos, la utilización reglas lógicas, la adquisición de las herramientas necesarias para la resolución de ejercicios, la comprensión de algunas

propiedades fundamentales, y la reproducción del método deductivo en relación con algunas propiedades elementales

- Una notable excepción la constituye el libro publicado por el Grupo Cero de Valencia, que siguiendo la fenomenología de Freudenthal, introduce y desarrolla los conceptos mediante una serie de actividades dirigidas.

Autor: Grupo Cero

Título: Matemáticas de Bachillerato volumen 2

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1982, Teide, Barcelona

Localización del manual utilizado: Biblioteca de la Facultad de Educación, 8.2.2.1/498

La estructura que posee este libro, induce a pensar que el aprendizaje debe predominar sobre la enseñanza, ya que plantea situaciones en la que es el alumno el que tiene que investigar, conjeturar y rectificar, si es preciso, para alcanzar el conocimiento, siendo el papel del maestro el de gestor del aprendizaje. Por eso, el libro no señala un programa, sino que provee de materiales para el trabajo activo del alumno, en palabras de los autores “en una clase activa de matemáticas, la tarea primordial es hacer matemáticas, es decir, matematizar”, y entienden hacer matemáticas como: la actividad intensa del alumno estudiando diversos fenómenos, con los conceptos matemáticos que sirven para organizarlos e interpretarlos. Se rompe la secuencia de los libros del bloque anterior: ejemplo-definición-propiedades-ejercicios, convirtiéndola en presentación de diversos fenómenos-análisis de estos fenómenos-introducción del concepto organizados-nuevos fenómenos-ejercicios.

Con estos planteamientos, y bajo la tutela del profesor, se pretenden desarrollar en los alumnos capacidades que nos se habían considerado hasta entonces en los libros de textos españoles como: inducir, conjeturar, experimentar, analizar, rectificar los propios errores, sintetizar,...

- Al finalizar el periodo correspondiente a la implantación de la L.G.E., cuando ya se había promulgado la nueva Ley General de Ordenación del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.), se editan libros que corresponden al plan antiguo, pero que incorporan muchas de las orientaciones del nuevo plan. Corresponden a los años 1990-1995, en los que la implantación de la ley sólo se ha llevó a cabo en el nivel primario y de forma experimental en algún Instituto de Bachillerato, así que durante estos cinco años ha coexistió la antigua ordenación académica con la nueva. A este grupo pertenece el siguiente libro, que aunque editado en 1988, se utilizó durante los años referidos.

Autor: M de Guzmán, J. Colera y A. Salvador

Título: Matemáticas. Bachillerato 3

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1988, Anaya, Madrid.

Localización del manual utilizado: Biblioteca personal.

Aunque en este libro se sigue desarrollando el plan de estudios de 1975, hay en él un enfoque distinto de los libros anteriormente analizados. Así observamos las siguientes características:

1. Importancia concedida a la motivación.
2. Apoyo en la historia de la Matemática y en sus aplicaciones.
3. Presentación intuitiva de los conceptos antes de su desarrollo formal
4. Actividad intensa del alumno en la realización de numerosos ejercicios y problemas de diversa índole.
5. Conexión de la Matemática con fenómenos de la realidad o de otras ciencias.
6. Utilización de la resolución de problemas como medio de aproximación a los conceptos.
7. Incorporación de apoyos didácticos como resúmenes, utilización de la calculadora, orientación en el uso de herramientas matemáticas y ejercicios de autoevaluación.
8. Presentación de anécdotas, hechos curiosos y llamativos para resaltar el aspecto social, lúdico y cultural de las matemáticas.

Todo esto configura una generación de libros de texto, en los que se nota la influencia de ciertas corrientes de la Didáctica de las Matemáticas, como la fenomenología didáctica, el aprendizaje por descubrimiento y la resolución de problemas.

4.3.2.- Descripciones

En el libro de Marcos de Lanuza (FML) no hay ninguna descripción de fenómenos no matemáticos relacionados con los puntos críticos, al contrario que en los libros de Anaya y del Grupo Cero, en el primero se incluyen dentro del apartado de ejercicios o problemas propuestos, y en el segundo hay dos resueltos: uno relativo al marco de una ventana y otro relacionado con calderas cilíndricas; los demás ejercicios sólo están propuestos.

4.3.2.1.- Situaciones cotidianas.

Al igual que en los periodos anteriores, los problemas referentes a situaciones cotidianas, son problemas en los que aunque el contexto se refiere a una situación relativamente habitual, en ellos subyace un problema de tipo geométrico relacionado con formas o cuerpos geométricos. Podemos agrupar los problemas de este tipo en relación con el objeto geométrico que estudian en los que se refieren a: un rectángulo, un cilindro, un ortoedro y una caja sin tapa. Entre los primeros tenemos los siguientes problemas:

d1: Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm y 1 cm respectivamente. Dar las dimensiones de una hoja de modo que el gasto de papel sea mínimo. (Anaya 77, p. 160, Anaya 88, p. 273 bien definido).

Este problema debe estar mal enunciado, debería indicar que los márgenes superior e inferior son de 2 cm y los laterales de 1 cm. Tanto la función como la ecuación que se movilizan para resolver los problemas de máximos y mínimos contienen dos variables, una de las cuáles se debe despejar de la ecuación para sustituir en la función y que resulte por tanto un función de una sola variable. Si el problema se mantiene tal como está planteado la función será solo función de una variable.

d2: Un pastor dispone de 1000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. Halla las dimensiones de la cerca para que el área encerrada sea máxima. (Anaya 88, p. 273).

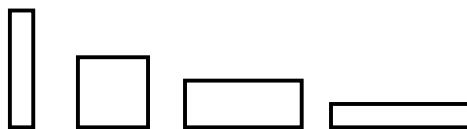
Se trata de uno de los problemas clásicos que se repiten en cada uno de los periodos. La formulación resulta más actual al utilizar una “tela metálica” para bordear el terreno. Aunque dicha tela posee área se mide por longitud, de esta forma dicha medida se relaciona con el área del recinto que encierra.

d3: Se quiere obtener un prisma recto de base rectangular partiendo de un tronco de madera cilíndrico y de modo que la madera desperdiciada sea mínima. Calcula las dimensiones de la sección de la viga que resulta en función del cilindro. (Anaya 88, p.277).

A pesar de que la formulación del problema sugiere que se relacionen figuras tridimensionales, se trata en este caso de inscribir un rectángulo en una circunferencia, de tal forma que su área sea máxima, para que el desperdicio de madera sea mínimo. Esto puede dar lugar a dos tipos de aproximaciones erróneas: utilizar figuras tridimensionales y buscar un mínimo.

d4: Se quiere construir un marco para una ventana que debe ser de 1 m^2 de área. El gasto del marco se estima en 125 pts por cada metro de altura de la ventana y en 80 cm por cada metro de anchura ¿cuáles son las dimensiones del más barato? (Anaya77, p. 161).

d5: Se encarga a un constructor unos bloques de viviendas y quiere, como es natural, minimizar el coste del apartado referente ventanas, de tal manera que manteniendo la misma luz, la misma superficie de ventana, el coste del marco sea mínimo. He aquí cuatro ventanas:



Todas las ventanas tienen la misma luz: 1 m^2 . Pero es evidente que el marco de la cuarta es más caro que el de las otras tres, porque tiene más perímetro.

¿Cuál es la ventana de marco más barato que tenga la misma *luz*, 1m^2 ? Lo que hay que estudiar es, por supuesto, el perímetro. Este perímetro es función de la altura de la ventana. (Grupo Cero, p. 102)

Ya en la etapa anterior, habíamos recogido un problema similar en relación con un solar, pero los dos problemas anteriores tienen un enunciado diferente. En ambos, hay que calcular el coste mínimo del marco de una ventana para un área prefijada de 1m^2 , la forma de la ventana es rectangular, y las magnitudes que intervienen son la superficie y el perímetro, y esta última es la que hay que minimizar en ambos casos para que el coste sea mínimo. En el primero, sorprende por inusitado, que el coste por la altura sea distinto que el de la anchura, con lo cual la ecuación que representa el coste del marco será $125h+80a$ en lugar de la función correspondiente al perímetro $2h+2a$. El problema del Grupo Cero se caracteriza por una mayor referencia al contexto en el que surge el problema, que puede ser influencia de la fenomenología de Freudenthal. Introduce conceptos como la luz de la ventana, que se resalta en letra cursiva para indicar que al permanecer constante a pesar de la forma de la ventana, no influirá en la luminosidad de la habitación correspondiente, con lo cual se justifica el que una de las dos variables que intervienen en la función sea constante. Además representa gráficamente algunas de las posibles variantes de las ventanas, para que el alumno visualice la situación, aunque también puede estar motivado para solventar la confusión que tienen algunos alumnos entre el área y el perímetro. Entre las gráficas de las ventanas se incluye tanto el prototipo del rectángulo, como otros rectángulos más “alargados” y un cuadrado, que los alumnos no siempre incluyen dentro de la clase de los rectángulos, se está aplicando el principio de la variabilidad perceptiva de Dienes.

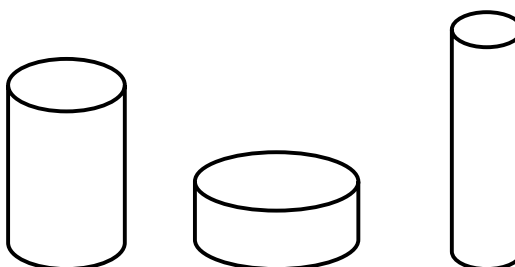
Los cuatro problemas siguientes, representan la misma situación: un cilindro de volumen dado (fijo) en el que se trata de minimizar la superficie.

d6: El mismo constructor quiere encargar calderas cilíndricas de 4 m^3 de capacidad para el agua caliente de la calefacción central de los edificios. Es conveniente construirlas de manera que tengan una mínima superficie de chapa. No sólo porque serán las más baratas, sino porque el enfriamiento del agua será el menor posible, al ser la mínima superficie expuesta al contacto con el medio ambiente exterior.

¿Cuál debe ser el radio para que la superficie de la caldera sea mínima?

(Sugerencia: como la superficie es $S=2\pi rh+2\pi r^2$, tenemos S como función no sólo de r , sino también de h . Pero si despejas h en la fórmula que da el volumen $V=4=\pi r^2 h$ tendrás S como función únicamente de r : $S=f(r)$)

Una vez encontrado el r , tal que $f'(r)=0$, utiliza uno cualquiera de los criterios citados más arriba) (Grupo Cero, p. 105).



d7: Los barriles que se utilizan habitualmente para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 l. Si se construyen de manera que su superficie total sea mínima ¿cuál es la altura y el radio de su base? (Grupo Cero, p. 108).

d8: Determina las dimensiones que debe tener un bote cilíndrico de un litro de capacidad para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata. (Anaya88, p. 277).

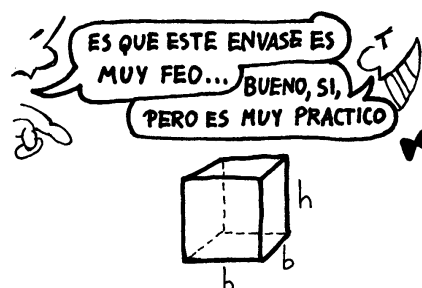
d9: En una fábrica se necesitan depósitos cilíndricos (sin tapa) de 1 m^3 de capacidad ¿Qué dimensiones deberán tener estos depósitos para que el coste del material con el que se fabrican sea mínimo? (Anaya 88, p. 275).

Está claro que los datos correspondientes a las magnitudes, indican tamaños muy diferentes, en realidad el primero es exactamente igual a 25 veces el segundo, 4000 veces el tercero y 4 veces el último. Esta diferencia de magnitudes está relacionada con la utilidad que se le va a dar a cada uno de los cilindros, el primero se va a utilizar como depósito, es decir, va a estar fijo, y el segundo se va a utilizar para almacenar petróleo junto con otros cilindros similares (de ahí el plural de barriles), será un depósito móvil. En el primero, se da la razón por la cuál se desea que la superficie sea mínima, para que sea más barata y el enfriamiento sea el menor posible, se incluye una sugerencia para encaminar la resolución del problema, y se incluye un gráfico de los posibles cilindros que pueden representar geoméricamente al depósito.

En cuanto a los ortoedros, se propone el problema:

d10: Un fabricante de accesorios de cocina quiere lanzar al mercado envases para legumbres cuya forma es la indicada en la figura y cuya base sea cuadrada. El volumen previsto para dichos envases es de 2.197 c.c. ¿Qué dimensiones deben tener para que su superficie sea mínima?

(La superficie total es $S=4bh+2b^2$ y el volumen $V=b^2h$) (Grupo Cero, p. 106)



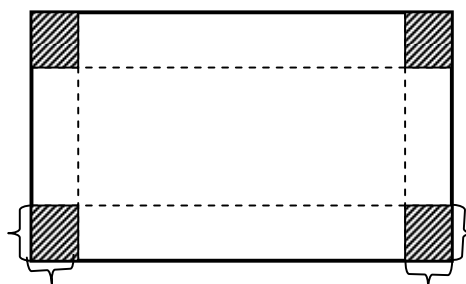
Se trata de minimizar la superficie de un prisma cuadrado para un volumen dado. Se incluyen expresiones como volumen, superficie, y base cuadrada que permiten centrarse en el tipo de magnitudes que se manejan, así como la forma del recipiente. Al utilizar la palabra dimensiones en la pregunta, se da a entender que se refiere a las dos magnitudes lineales, lado de la base y altura, que se manejan en las ecuaciones correspondientes al planteamiento del problema. A pesar de que en los prismas hay tres dimensiones que determinan tanto la superficie como el volumen, alto, ancho y largo, se utiliza el recurso de que la base sea cuadrada para reducir a dos dichas dimensiones. Se dan indicaciones que permiten plantear el problema y resolverlo, y sirven de recordatorio de las fórmulas utilizadas para calcular áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. El recipiente resulta poco manejable, ya que al tener dimensiones de 2000 cm^3 , el peso que tendrá con las legumbres será excesivo, y en cuanto a la forma, al ser un prisma cuadrado, resulta complicado de sujetar con las manos. Se incluye un dibujo tipo cómic con el que se intenta justificar y parodiar la elección del cuerpo geométrico.

d11: Halla las dimensiones de un estanque en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada para que su volumen sea máximo, sabiendo que la suma de las áreas de las cinco caras del estanque es de 144 m^2 . (Anaya 88, p. 278).

Estamos ante el dual del ejemplo anterior, se aporta el dato del área lateral del estanque, y se quiere que el volumen sea máximo. Este mismo problema se ha planteado en otras ocasiones en un contexto matemático en vez de una situación realista, y en relación con un cilindro en lugar de un paralelepípedo recto. El dato que aparece en el enunciado, es acorde a la situación planteada, aunque puede ser desmesurado en otras situaciones.

El siguiente problema, se refiere a una caja sin tapa:

d12: En una tintorería necesitan depósitos para colocar el tinte, y para construirlos quieren aprovechar unas chapas rectangulares de $10 \text{ dm} \times 16 \text{ dm}$. Se construyen con estas chapas los depósitos por el procedimiento de cortar las esquinas de las planchas en la forma indicada en la figura, luego doblar y finalmente soldar.

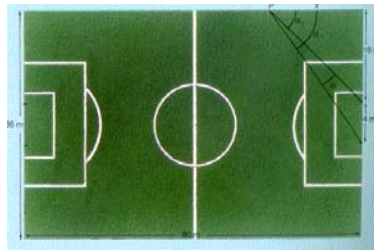


- Llamando x a uno de los lados de cada uno de los cuadrados que se recortan, escribe la función $f: x \rightarrow V$ que da el volumen del depósito conocido x .
- ¿Para qué valor de x se obtiene un depósito de volumen máximo?
- En el caso de que el volumen del depósito sea máximo ¿Cuántos kilos de tinte podrá contener cada uno de los depósitos si la densidad del tinte es de $1'20 \text{ kg./dm}^3$ (Grupo Cero, p. 108).

Se trata de un problema que aparece en muchos de los libros que hemos consultado, hay que construir una caja sin tapa recortando cuadrados en las esquinas. Este problema es sorprendente desde el punto de vista del alumno cuando en matemáticas los cuerpos geométricos que se suelen construir mediante desarrollos planos de las caras, utilizan pestañas para poder ajustar unas caras con otras, no es corriente construir una caja mediante recortes en un rectángulo, en lugar de hacerlo a partir de uno de esos desarrollos. Tampoco es normal que no se contemple la posibilidad de utilizar las pestañas para poder sujetar las caras en posición vertical ¿de qué otra forma podremos sujetarlas?, y tampoco es normal que de la construcción nos resulte una caja sin tapa cuando lo normal es construir cuerpos cerrados. Pero, en este caso, se da una explicación son “depósitos para colocar el tinte”, se parte de una chapa y los bordes se van a soldar. En este problema, se le da al alumno la correspondencia entre el signo x y lo que representa “el lado de cada uno de los cuadrados que se recortan”, se le indica cuál es la función con la que se va a trabajar “la que da el volumen del depósito conocido x ”, se interpreta la función como correspondencia entre el lado del cuadrado y el volumen de la caja resultante, es decir, se expresa que la variación del lado influirá en el volumen.

Finalmente, el problema que se incluye a continuación, es un inicio de los que se plantearán en el periodo siguiente:

d13: En un entrenamiento, un jugador de fútbol tiene que lanzar el balón sobre una portería. A este jugador le está permitido elegir el sitio exacto del lanzamiento, con la condición de que éste se haga desde la línea de banda. ¿Cuál será el punto de lanzamiento más idóneo. (Anaya 88, p. 274).

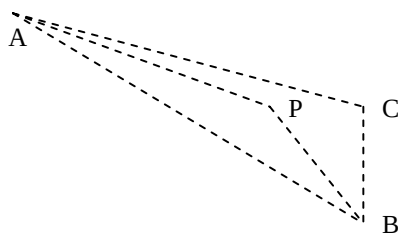


En el hay que utilizar relaciones trigonométricas que no se indican en el enunciado, ya que no están relacionados con una forma geométrica, y la formulación que se da no ofrece ningún dato ni se indica algún tipo de relación que permita establecer la función necesaria. El enunciado simplemente es una excusa en la que se plantea una situación conocida para los alumnos, pero no se da ninguna indicación de la forma de resolución. A estos problemas, se les añade un gráfico en el que si se expresan estos datos, y se indica que la atención tiene que estar puesta en los ángulos formados en dicha gráfica. Las relaciones que hay que establecer son por lo tanto trigonométricas aunque los alumnos no están acostumbrados a resolver situaciones de este tipo con una formulación de tipo realista.

4.3.2.2.- Recorridos mínimos.

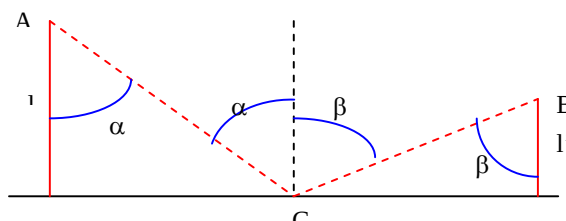
En los libros de este periodo sólo hay dos problemas de los que hemos llamado de recorridos mínimos.

d14: Si un nadador A situado en tierra quiere salvar a un naufrago B ¿Es la recta AB el camino más rápido? Ten en cuenta que el nadador lleva una velocidad mayor corriendo por tierra que nadando: no es pues la recta AB ¿Será ACB? (Anaya 88, p. 275)



En el problema no se dan datos numéricos con lo que habrá que resolverlo usando letras como números generalizados. Las relaciones pueden determinarse por el teorema de Pitágoras, y se obtiene un resultado similar al correspondiente a los problemas acerca de la refracción de la luz.

d15: Un rayo luminoso parte de un punto A y llega a otro B después de reflejarse en la superficie plana de un espejo. Localiza el punto C para que la trayectoria sea mínima. (Anaya 88, p. 277)



En este caso se trata del mismo problema que el anterior pero como reflexión de la luz. Se plantea el problema de forma general sin datos numéricos con lo que se obtendrá la fórmula de la reflexión de la luz.

4.3.2.3.- Fenómenos físicos.

Los siguientes problemas, están relacionados con aplicaciones o fenómenos físicos, en particular, con la velocidad, la refracción de la luz y la intensidad luminosa.

d16: En Física, el principio de Fermat afirma que el camino que sigue un rayo de luz es aquel en el que emplea el menor tiempo para recorrerlo. ¿Podemos predecir qué camino seguirá un rayo de luz? (Anaya 88, p. 275).

Desde el primer periodo, no habíamos vuelto a encontrar este problema. Lo hemos clasificado dentro de los fenómenos físicos, aunque se podría haber incluido en los problemas de recorridos mínimos. Suponiendo que la trayectoria de la luz atraviesa distintos medios, obtendríamos la ley de refracción de la luz, pero es un problema complicado, en el que hay que utilizar relaciones trigonométricas para establecer dicha fórmula.

d17: Un camión ha de recorrer 300 km, en una carretera llana a velocidad constante de x Km/h. Las leyes de circulación prescriben $35 < x < 55$. Se supone que el carburante cuesta 3 duros el litro y que el consumo es de $10 + (x^2/120)$ litros por hora. Si el conductor cobra P duros por hora y si obedece a todas las leyes de tráfico, calcular la velocidad más económica y el coste del viaje en los casos siguientes:

- $P=0$ (conduce el dueño del camión)
- $P=20$
- $P=40$
- $P=60$

(Anaya 77, p. 161).

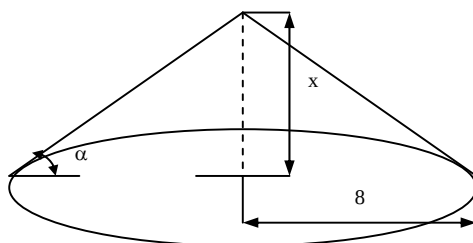
En el problema anterior, se trata de hacer mínimo el gasto del viaje para una distancia dada. Con los datos hay que construir una función de la velocidad (variable independiente) que nos de el gasto que se va a producir en el viaje. Para plantear dicha función hay que poseer algunos conocimientos elementales de la física, hay que saber relacionar los datos y las unidades en las que están expresados. La expresión que resulta es una función racional de x , al contrario que en los ejercicios anteriores, aquí no se inicia el problema con el planteamiento de una función de dos variables. Es un problema realista ya

que es significativo el dato de que la carretera es llana, cuando en España es difícil encontrar 300 km de carretera completamente llana, que la velocidad se mantenga constante, en lugar de utilizar la velocidad media y, por lo tanto, el consumo medio, que la velocidad en una carretera llana deba ser tan reducida no más de 55 km/h, y más sorprendente aún que se establezca una velocidad mínima de 35 km/h, desde el punto de vista de las matemáticas, se está dando el dominio de definición de la función, es decir, acotando el intervalo de posibilidades de encontrar el consumo mínimo, y que la gasolina sólo cueste 15 pts/l. La función que establece el consumo, es una parábola, que tiene el mínimo cuando la velocidad es cero, y aumenta con la velocidad. Una característica de este problema, es que contempla la posibilidad de resolverlo para distintos valores del coste del conductor, de tal forma que la primera posibilidad, con coste cero de conductor, da una velocidad recomendada que no llega a 35 km/h y la última posibilidad, cuando el gasto es de 300 pts/h, da una velocidad de 60 Km/h que es superior a los 55 permitidos.

d18: La intensidad de iluminación I de un foco luminoso situado en el centro de una pista de patinaje circular viene dada por la fórmula:

$$I = \frac{A \operatorname{sen} \alpha}{x^2 + r^2}$$

Donde A es una constante, x es la altura, r y α los datos que indica la figura 12. Si $r=8\text{m}$, $A=1$ y la altura máxima a que puede situarse el foco son 7m ¿cuál será la altura del foco para que la iluminación sea máxima en el borde de la pista? (Anaya 77, p. 161, Anaya 88, p. 277).



Este problema, no se ha encontrado con anterioridad a esta época. En él se da la función que hay que estudiar para encontrar la máxima iluminación en relación con la altura, sabiendo que no puede superarse los 7 m. Es una función trascendente, que puede dar problemas a los alumnos, ya que tienen que utilizar algunas identidades trigonométricas para conseguir una función de una sola variable. Es un problema que conduce a múltiples extremos relativos dada la periodicidad de la función considerada, pero no todos pertenecen al dominio de definición de la función. Al contrario de los otros problemas, en los que los alumnos si lo intentan, pueden llegar a visualizar la función que se está considerando, en este caso resulta ciertamente más complicado. Se acompaña de un dibujo que permita visualizar la situación, los datos considerados y la posibilidad de una mayor o menor iluminación. En dicha representación, se resalta la relación del ángulo considerado, con el triángulo rectángulo, a fin de reconocer las relaciones entre ambos, que permitan construir la función idónea para resolver el problema.

d19: La intensidad que circula por un circuito de resistencia R es, según la ley de Ohm,

$$I = \frac{E}{r + R} \text{ siendo } E \text{ la fuerza electromotriz, } r \text{ la resistencia interior y } R \text{ la exterior. La}$$

potencia absorbida por el circuito es $w = RI^2 = \frac{RE^2}{(r + R)^2}$. Si suponemos que $E=8$

voltios y $r=0.57$ ohmios ¿cuánto debe valer la resistencia exterior R para que la potencia sea máxima? (Anaya 88, p. 277).

Este problema se formuló anteriormente en un libro del segundo periodo. Su enunciado alude a una situación típica de la física pero se aportan al alumno las expresiones algebraicas de las funciones que tiene que utilizar. Se trata de funciones racionales que con los datos que se aportan, resultan ser de una variable, por lo que no hay que utilizar ninguna relación entre variables.

4.3.2.4.- Contextos económicos.

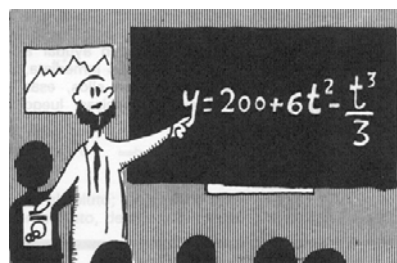
El siguiente es un problema relacionado con un fenómeno de tipo económico, propio de la sociedad de consumo, que estaba empezando a gestarse en la España democrática, que se consolidaría con la llegada del partido socialista a la presidencia del gobierno en el año 1982.

d20: El departamento de marketing de una empresa estima que los ingresos mensuales que producirá el lanzamiento de un nuevo detergente vendrán dados, en miles de pesetas, por:

$$y=200+6t^2-\frac{t^3}{3}$$

dónde el tiempo t viene expresado en meses a partir del lanzamiento al mercado del detergente. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea de los ingresos a los 5 meses del lanzamiento?

¿Durante qué período de tiempo aumenta esta tasa? ¿Durante qué periodo disminuye? ¿En qué momento es más alta? (Grupo Cero, p. 101)



Se incluye además un dibujo de un personaje con bata blanca, se supone que es un científico, con lo que se le quiere dotar de credibilidad a los datos aportados, y un puntero que señala una pizarra en la que está escrita la fórmula de los ingresos que producirá el nuevo producto, hablando ante un auditorio que presumiblemente son los directivos de la empresa que va a lanzar el producto. La función es una cúbica que tiene un solo cero aproximadamente a los 20 meses del lanzamiento del producto, y un máximo a los 12 meses, es decir se produce un lento crecimiento hasta alcanzar el máximo y luego un fuerte decrecimiento con lo cual el producto no producirá beneficios a partir del año. Se trata de buscar el máximo de ingresos que corresponde a una determinada mensualidad. Es el primer ejercicio que se propone en relación con los máximos y mínimos, y sirve como enlace con los conceptos de crecimiento de decrecimiento que se han trabajado

anteriormente. La solución de este ejercicio puede hacerse mediante el estudio de la gráfica sin necesidad de utilizar el cálculo de la derivada.

d21: Para el tratamiento de una enfermedad cardíaca se está probando en un laboratorio, un medicamento en distintas dosis para comprobar sus efectos favorables. El tanto por ciento de curaciones y, que se obtienen, con una dosis de x miligramos viene dado por

$$y = 70 - \frac{150}{x + 3}$$

Pero el número de enfermos en los que el tratamiento produce efectos secundarios que perjudican el hígado aumenta en un 2'5% por cada miligramo que se aumenta la dosis.

¿Cuál es la cantidad de medicamento que consideras más adecuada? (Grupo Cero, p. 108).

Este último problema se refiere a una situación de tipo **estadístico** relacionada con un contexto médico, que aunque no pide el cálculo de un máximo o un mínimo, si se pregunta acerca de la cantidad óptima de medicamento. Es un problema de tipo más bien interpretativo y decisivo, en el sentido de que no hay una solución única, sino que se debe tratar de equilibrar el número de curaciones con los efectos perjudiciales que pudiera tener el medicamento, no hay que olvidar que la función que modeliza el problema es una hipérbola en la que la aproximación a la asíntota horizontal representará un mayor número de curaciones, pero que a partir de cierto momento, los efectos curativos no compensarán los efectos perjudiciales sobre el hígado. Este tipo de problemas junto con el anterior, no se han encontrado en los libros de la etapa anterior, en este caso puede ser debido al auge de la estadística y de su enseñanza en el último cuarto del siglo XX. Se plantea la situación de maximizar el número de curaciones mediante un nuevo tratamiento

4.3.2.5- *Descripciones de fenómenos matemáticos aritméticos.*

En cuanto a fenómenos matemáticos, en el libro de Marcos de Lanuza sólo interviene el cálculo de máximos y mínimos en relación con funciones exclusivamente polinómicas y racionales. En el resto de los libros hay algunos que incluyen contextos aritméticos y en otros se plantean situaciones geométricas. Entre los problemas aritméticos tenemos:

d22: Calcular dos números positivos tales que su suma sea 20 y su producto máximo. (Anaya 77, p. 158, Anaya 88, p. 273).

d23: Hallar dos números positivos tales que sumen 21 y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. (Anaya 77, p. 160, Anaya 88, p. 269).

Son dos problemas similares, en los que se proporciona la suma de dos números y se pide que un determinado producto entre ellos debe ser máximo. La suma es una cantidad de tipo lineal, mientras que el producto sería cuadrática. La función que se obtiene, es una función de segundo grado que tiene un máximo. En el primero se obtiene como resultado que los dos números son iguales a 10, siendo similar a la situación en la que se da el perímetro de un rectángulo y se pide cuál es su área máxima, el resultado que se obtiene es

un cuadrado. En el segundo caso, sería igual que calcular el volumen máximo para un perímetro dado, la función por lo tanto es una cúbica que tiene un mínimo para $x=0$ y un máximo para $x=40/3$.

d24: ¿Cuál es el número que sumado 25 veces con su inverso se obtiene un valor mínimo? (Anaya 88, p. 273)

d25: Encuentra un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima. (Anaya 88, p. 273).

d26: ¿Cómo habría de descomponer un número a en dos sumandos positivos de forma que sea mínima la suma del cuadrado de uno más el triple del cuadrado del otro (Anaya 88, p. 278).

En todos estos problemas se plantea una situación aritmética en la que interviene un solo número lo que no es habitual. Dicho número se relaciona consigo mismo de forma que al variarlo se obtiene una función que podrá tener puntos críticos. La formulación de dicha función resulta de hacer una traducción literal del enunciado, ya que tal como está expresado, indica una sucesión temporal de acciones aritméticas en relación con dicho número, que se pueden hacer corresponder con términos algebraicos.

4.3.2.6.- *Descripciones de fenómenos matemáticos geométricos.*

Sólo en los libros de Anaya tenemos algunos relacionados con contextos geométricos, que plantean el estudio de una figura o un cuerpo geométrico, su área o su volumen. Algunos son los problemas clásicos que relacionan el perímetro de un rectángulo con el área.

d27: De todos los rectángulos de perímetro 20 cm. ¿cuál es el de área máxima? (Anaya 88, p. 273).

d28: ¿Qué dimensiones debe tener un rectángulo de área 64 cm^2 para que su perímetro sea mínimo? (Anaya 88, p. 278).

Otros, son problemas en los que se inscriben unas figuras en otras:

d29: Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 10 cm (Anaya 77, p. 159, Anaya 88, p. 268).

d30: Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un semicírculo (Anaya 88, p. 278).

d31: Inscribe un trapecio de área máxima en un semicírculo de radio r . (Anaya 88, p. 278).

d32: ¿Qué dimensiones debe tener un trapecio, inscrito en un semicírculo de radio 5 cm. para que su área sea máxima? (Anaya 88, p. 278).

d33: Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm. (Anaya 77, p. 159, Anaya 88, p. 274).

Algunos problemas se refieren a figuras curvilíneas:

d34: Un sector circular tiene 40 cm de perímetro ¿cómo debe ser el ángulo central y el radio de este sector para que su área sea máxima? (Anaya 77, p. 159).

En otros, a partir de una figura lineal, se construyen figuras planas:

d35: Dividir un segmento de 6 cm de longitud en dos partes tales que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros que tiene por lados dichas partes. (Anaya 77, p. 159);

Se trata de relacionar la longitud de un segmento con las dimensiones de los triángulos equiláteros que se pueden construir a partir de dicho segmento, el área debe ser mínima.

También hay problemas novedosos que hemos encontrado en los libros de los periodos anteriores.

d36: ¿Qué medidas tiene el triángulo rectángulo de máxima área entre todos lo que tienen 10 cm de hipotenusa? (Anaya 88, p. 273).

d37: Calcular entre todos los rectángulos de perímetro 12 el que tenga la diagonal menor. ¿Cuánto mide dicha diagonal? (Anaya 77, p. 160, Anaya 88, p. 273).

d38: Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 18 ¿cuál es el que tiene área máxima? (Anaya 77, p. 160, Anaya 88, p. 274, 279).

d39: Las manecillas de un reloj miden 4 y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo. Se pide:

Expresar el área de este triángulo en función del tiempo.

Determinar el instante entre las 12 h y las 12 h 30 m para el que esta área sea máxima. Determinar esta área.. (Anaya 77, p. 159, Anaya 88, p. 268).

d40: La base menor de un trapecio rectángulo mide 12 cm; el lado oblicuo tiene una longitud de 6 cm. Se pide:

Ángulo que debe formar ese lado con la base mayor para que el área del trapecio sea máxima.

Calcular el área. (Anaya 77, p. 160, Anaya 88, p. 278).

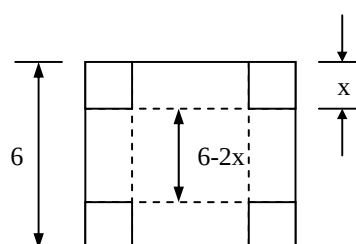
d41: La base de un triángulo isósceles es de 12 cm y la altura de 5 cm. Determinar un punto sobre esta altura de modo que la suma de sus distancias a los tres vértices sea mínima. (Anaya 77, p.161, Anaya 88, p. 278).

El problema d39, plantea una situación relacionada con la medida del tiempo que no se había encontrado en ninguno de los libros analizados. Además la función que hay que optimizar representará el área de un triángulo en función del tiempo, variables que no suelen relacionarse. Para resolver el problema, se necesitará recurrir a nociones de trigonometría, que permitan calcular la altura del triángulo para poder representar el área y

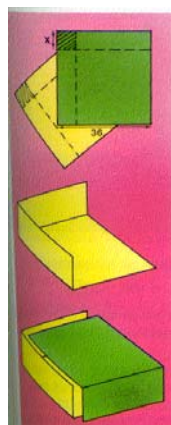
posteriormente relacionarla con el tiempo, hay que asociar magnitudes geométricas con magnitudes temporales. Estos problemas relacionados con el tiempo suelen plantear grandes dificultades a los alumnos. En el d40, se relacionan los lados y el área de la misma figura, es decir, medidas lineales con medidas cuadráticas. Para poder hacerlo, como en el problema anterior, hay que utilizar nociones trigonométricas que nos permitan expresar la altura en función del ángulo que forma el lado oblicuo con la base mayor, que es desconocida. Y en este el último, se incluyen solamente medidas lineales, la función que hay que estudiar se obtiene relacionando las distancias a los vértices utilizando el teorema de Pitágoras. La función resultante es una función con un radical y las medidas que se obtienen son números irracionales.

Entre los que se plantean relacionados con figuras planas que generan figuras tridimensionales, tenemos los siguientes:

d42: A partir de un cuadrado de cartón de lado 6 dm. Queremos construir cajas abiertas en la parte superior, como indica la figura 11 ¿Cuánto debe valer x para que el volumen de la caja sea máximo? (Anaya 77, p. 157).



d43: Nos planteamos el mismo problema del ejemplo 2, pero suponiendo que no interesan cajas de más de 0,9m (es una errata) de altura ¿Tendrá la caja de volumen máximo 0,9 dm de altura o tendrá menos? (Anaya 77, p. 158)



d44: Recortando un cuadradito de cada esquina de unos cartones rectangulares de dimensiones 6 y 8 cm, se pueden construir cajas sin tapa ¿Qué medida deben tener esos cuadraditos para que el volumen de las cajas sea máximo? (Anaya 88, p. 274).

Los problemas anteriores son similares a uno propuesto por el Grupo Cero (ver p. 351). Los dos primeros a diferencia de otros similares, en particular del tercero, la situación que plantean tiene que ver con la figura geométrica de un cuadrado cuando lo habitual es que sea un rectángulo. Se añade una representación del cuadrado que expresa la forma de construir la caja indicando cuál es la variable. El dominio de definición de la función en este caso es el intervalo $(0, 3)$ lo que no es muy habitual que se tenga en cuenta, el máximo se obtiene para $x=1$. El segundo problema impone una limitación al dominio de definición de la función siendo sólo posible hasta 0'9 dm de altura con lo cual se obtiene un máximo

absoluto de la función en ese intervalo. Destaca el gráfico que indica cómo construir la caja.

Entre los problemas geométricos que estudian cuerpos geométricos, tenemos algunos en los que se pide el volumen máximo, y otros en los que se trata de calcular el área lateral mínima como:

d45: Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm. y de capacidad máxima ¿Cuál debe ser la longitud del radio de la base? (Anaya 77 p. 160).

d46: De todos los cilindros de 36 dm^2 ¹⁴ calcular las dimensiones que tiene el de área total mínima. (Anaya 77, p. 160).

d47: De todos los cilindros que tienen 1 m^2 de superficie lateral ¿cuál es el de volumen máximo? ¿Y cuál el de volumen máximo si el radio de la base pudiera medir, como máximo 10 m?. (Anaya 88 p. 279).

d48: La suma de las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 72 cm. ¿Qué dimensiones debe tener dicho prisma para que su volumen sea máximo? (Anaya 88, p. 278).

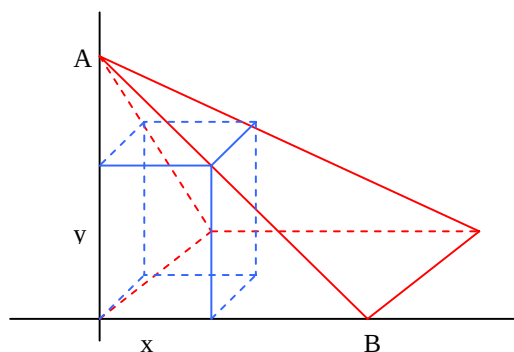
En otros, se trata de inscribir un cuerpo en otro con dimensiones óptimas:

d49. Halla la altura y el radio del cono de revolución de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio 9 cm. (Anaya 77, p. 160).

d50: ¿Qué dimensiones debe tener el cilindro de máximo volumen inscrito en una esfera de radio $R=12 \text{ cm}$? (Anaya 88, p. 272).

d51: En un cono recto de altura 50 cm y radio de la base 25 cm, se inscribe un cilindro ¿Qué dimensiones debe tener éste para que su volumen sea máximo? (Anaya 88, p. 278).

d52: Esta pirámide irregular tiene una base cuadrada de 1 dm. de lado y una de sus aristas laterales, que mide 3 dm, es perpendicular al plano de la base. La hemos cortado por un plano paralelo a la base a una distancia y de ella, obteniendo un cuadrado proyectar éste sobre una base a una distancia x y de ella, obteniendo un cuadrado. Al proyectar éste sobre la base de la pirámide, queda un ortoedro ¿Cuánto debe valer y para que la superficie del ortoedro sea máxima? (Anaya 88, p. 278).



En el dibujo, se señalan las dimensiones de las figuras que intervienen en el enunciado del problema, de forma que, se representa geoméricamente la transformación que se ha hecho sobre la pirámide para obtener el ortoedro, y se visualizan dichas dimensiones.

¹⁴ Debe ser una errata del libro la unidad de medida utilizada.

Las descripciones del enunciado, de esta forma, se representan para aclarar las acciones ejercidas. Las dimensiones de la pirámide establecen el dominio de definición de la función.

Hay problemas en los que a partir de una figura, se construye un cuerpo geométrico:

d53: Si de un disco metálico quitamos un sector circular podemos construir un vaso cónico. Determinar el sector circular que debemos quitar para que el volumen del vaso sea máximo. (Anaya 77, p. 160, Anaya 88, p. 278)).

d54 Un triángulo rectángulo gira alrededor de uno de sus catetos 360° . Determinar el volumen máximo que puede engendrar, sabiendo que la suma de los dos catetos es 10 cm. (Anaya 77, p. 161, Anaya 88, p. 278).

d55: ¿Qué dimensiones debe tener un triángulo isósceles de 10 cm. de perímetro para que al girar alrededor de su altura, el volumen engendrado sea máximo? (Anaya 88, p. 278).

4.3.2.7.- Descripciones gráficas.

Por primera vez, y al final de este periodo, surge un nuevo tipo de problemas relacionados con la optimización de funciones, que son aquellos que utilizan objetos matemáticos de Geometría cartesiana. En los siguientes problemas, se tratan los casos de una recta, una elipse y una parábola:

d56: Halla la ecuación de la recta, que pasando por el punto $M(2,1)$, los semiejes positivos de coordenadas determinen sobre ella un segmento AB no nulo de longitud mínima. (Anaya 88, p. 278).

d57: Determinar los vértices de un rectángulo que se ha de inscribir en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ para que su área sea máxima. (Anaya, p. 169).

d58: Busca un punto de la parábola $y^2=4x$ cuya distancia al punto $P(4,0)$ sea mínima. (Anaya 88, p. 278).

4.3.2.8.- Definiciones.

Las definiciones sobre máximos y mínimos que hemos encontrado en los libros de este periodo son las siguientes:

d59: Se dice que una función tiene un máximo relativo en $x=a$ cuando:

$$f(a-h) \leq f(a) \leq f(a+h); \quad h > 0$$

en un entorno de a . (FML, p. 125).¹⁵

¹⁵ Si $f(b-h) \geq f(b) \geq f(b+h)$ la función se dice que tiene un mínimo relativo en $x=b$. (FML, p. 125)

Esta definición es similar a la del texto piloto que analizamos en el periodo anterior. Ya habíamos concluido en una investigación anterior que dicho libro ejerce su influencia sobre el de Marcos de Lanuza, por lo que se considera un libro que se mantiene todavía bajo las directrices de la época anterior. Es la definición propia de la matemática moderna, se tiene en cuenta el entorno al que pertenece el punto, que se expresa mediante los símbolos $a-h$ y $a+h$. En la definición, se incluye una desigualdad que caracteriza al máximo en relación con los puntos del entorno que se está considerando. Hay que destacar la oposición que se establece entre los dos signos de desigualdad utilizados. A pesar del sentido lineal progresivo, de izquierda a derecha, en el que está escrita la expresión, no se mantiene dicha progresión en la relación de orden al oponer los signos, lo que obliga a interpretar uno de ellos de izquierda a derecha, y otro en sentido contrario

d60: Sea f una función definida en un intervalo abierto I , finito o infinito (I puede ser (c, d) ; $(-\infty, c)$; $(d, +\infty)$). Se dice que f tiene en $a \in I$ un máximo relativo si existe un intervalo J de centro en a tal que

Para todo $x \in J$, $f(x) \leq f(a)$.

(Anaya77, p. 146)¹⁶.

d61: Sea f una función definida en un conjunto D . Se dice que f alcanza en $a \in D$ su máximo absoluto o global si para todo $x \in D$ $f(x) \leq f(a)$. Análogamente f alcanza en a un mínimo absoluto cuando para todo $x \in D$ $f(x) \geq f(a)$

El valor $f(a)$ se llama máximo absoluto de f en D .

A veces también se le llama máximo de f en D . (Anaya77, pp. 155-156).

En el libro de Anaya, se dan sendas definiciones para el máximo relativo y el máximo absoluto. Los intervalos se definen por medio de letras mayúsculas, indicando de esta forma cualquier tipo de intervalo finito o infinito, y sus posibles variantes. Resulta una novedad respecto de los libros de la etapa anterior, en que los entornos de un punto venían dados por la expresión $(a-h, a+h)$. Hay una gran influencia de la teoría de conjuntos, una letra se utiliza para representar cualquier tipo de conjunto sin que haya ninguna indicación al punto que se está considerando. Hay que señalar asimismo, la utilización de símbolos y expresiones propias de la lógica ($\in$, para todo, si existe). Además, se aclara que el máximo no es el punto, sino el valor de la función en dicho punto, intentando con ello establecer la exactitud del término, de las expresiones y del lenguaje propiamente lógico-matemático.

d62: Intuitivamente

Un máximo es un punto que “está más alto” que sus vecinos.

Un mínimo es un punto que “está más bajo” que sus vecinos.

Con más precisión:

Una función tiene un máximo para $x=a$ si hay un intervalo que contenga a a en el cual se cumpla que $f(a) \geq f(x)$ para todos los x de ese intervalo. $f(a)$ es entonces el máximo.

¹⁶ Sea una función definida en un intervalo abierto I . Se dice que f tiene en $a \in I$ un máximo relativo si existe un intervalo J de centro en a tal que
Para todo $x \in J$, $f(x) \geq f(a)$.

Una función tiene un mínimo para $x=a$ si hay un intervalo que contenga a a en el cual se cumpla que $f(a) \leq f(x)$ para todos los x de ese intervalo. $f(a)$ es entonces el mínimo.

Fácilmente se comprende que no estamos refiriéndonos a máximo o mínimo globales (el mayor valor de la función o el menor valor de la función en todo su campo de existencia). Decimos pues que la función tiene en ...MÁXIMOS LOCALES y en ... MÍNIMOS LOCALES.

Eventualmente, uno de los máximos locales puede ser máximo global ...

Y uno de los mínimos locales puede ser un mínimo global. (Grupo Cero, p.101).

En el libro del Grupo Cero hay un cambio total: no hay expresiones simbólicas relacionadas con los intervalos, se utiliza la lengua habitual para hacer referencia a ellos; se distingue entre máximo locales y globales que son expresiones más típicas del análisis en lugar de relativos y absolutos, que está más en consonancia con la física; hay una clara referencia a la curva de la función en las expresiones “está más alto”, o “está más bajo”, que no se había realizado con anterioridad. Esta relación entre la definición de un término, y su representación gráfica tiene un carácter de ayuda a la visualización del término y a la intuición. Hay que destacar la sucesión de colores para distinguir la importancia de los distintos párrafos desarrollados.

d63: Los valores de x para los cuales es $f'(x)=0$ se suelen llamar valores estacionarios.

(Grupo Cero, p. 105).

d64: Puntos singulares.

Son aquellos puntos en los que la tangente a la curva es paralela al eje X (tangente horizontal). En ellos la derivada se hace cero.



Los puntos singulares se llaman también puntos estacionarios.

(Anaya88, p. 256).

En este libro de Anaya, al contrario que en el otro analizado, no se utiliza ningún símbolo, ni siquiera para hacer referencia al punto singular, ni, siquiera para expresar la condición que cumplen los puntos extremos. En este caso, se hace de forma totalmente intuitiva, identificando la función con la curva, y sin relacionar el punto con aquellos que están en un entorno suyo, sino identificándolo de manera individual, en relación con la posición de la recta tangente. La última frase incluida en la definición: “en ellos la derivada se hace cero” identifica la tangente geométrica con el valor de la tangente trigonométrica, de tal forma que una posición geométrica se asocia con un valor numérico, el 0. No se utiliza ninguna gráfica para visualizar la definición, o comprobar las condiciones matemáticas que se imponen a dichos puntos. Se hace una observación en relación con los términos que se utilizan para nombrar dichos puntos: puntos singulares o puntos estacionarios. Este tipo de vocablos son típicos de los libros publicados durante la L.G.E. En cambio, no se utilizan otros términos en la definición más utilizados en relación con dichos puntos como: máximos, mínimos o puntos de inflexión.

En cuanto a los puntos de inflexión, las definiciones son las siguientes:

d65: Tenemos una curva $y=f(x)$. Trazamos la recta tangente a ella en un punto P , cuya ecuación es $y=t(x)$. Entonces:

Si la tangente atraviesa a la curva, es decir, si a la izquierda de P es $f(x)<t(x)$ y a la derecha $f(x)>t(x)$ o viceversa, P es un punto de inflexión. (Anaya 88, p. 260).

De nuevo se identifica la función $f(x)$ con su representación gráfica, al utilizar la expresión: “una curva $y=f(x)$ ”. En este caso, la definición de punto de inflexión es una definición un tanto oscura, en la que, aunque se utilizan términos intuitivos (la tangente **atraviesa** la curva, a la **derecha**, o a la **izquierda**), se pone el énfasis, más bien, en expresiones de tipo algebraico como $f(x)$ y $t(x)$ que se relacionan entre sí. La expresión $t(x)$ no es habitual utilizarla en relación con la tangente, ya que normalmente se representa simplemente por t , haciendo uso de su inicial, pero sin hacer referencia a que depende del valor x .

4.3.2.9.- Descripciones de procesos o reglas.

En todos los libros, para que los alumnos calculen máximos y mínimos con facilidad, se da una descripción de las reglas para poder realizar los cálculos de forma rápida. En el libro de Marcos de Lanuza se da el siguiente criterio:

d66: Sea la función $y=f(x)$ cuya derivada y' se anula en $x=a$, es decir, $f'(a)=0$ entonces puede suceder:

1º. $f''(a)>0 \Rightarrow f'(x)$ es creciente en $x=a$ y como se anula en $x=a$
 $f'(a-h)<0$ y $f'(a+h)>0$ ($h>0$)

esto es, la derivada pasa de negativa a positiva y la función de decreciente a creciente. Existe un mínimo en $x=a$.

2º $f''(a)<0 \Rightarrow f'(x)$ es decreciente en $x=a$ y como se anula en este punto:
 $f'(a-h)>0$ y $f'(a+h)<0$

o sea, la derivada pasa de positiva a negativa y la función de creciente a decreciente. Tiene un máximo en $x=a$.

3º. $f''(a)=0$. Entonces nada podemos afirmar y es preciso utilizar otros criterios como el empleado en el ejemplo anterior al cual aplicaremos ahora el criterio de la derivada segunda. (FML, p. 127).

Se utilizan las diferentes posibilidades del valor de la segunda derivada para relacionarlo con las propiedades de la primera derivada y de aquí con la existencia de un máximo o un mínimo en la función. Como se ha dicho anteriormente se utiliza la misma denominación de los intervalos que los textos piloto de la etapa anterior ($a-h$, $a+h$), hay que destacar también la incorporación de algún símbolo lógico como $\Rightarrow$

d67: Sea a un punto del dominio de f con posibilidades de ser máximo.

Por ejemplo, si f es derivable en todos los puntos, supongamos que $f'(a)=0$.

1º Si $f'(x)>0$ a la izquierda de a y $f'(x)<0$ a la derecha de a , entonces f tiene en a un máximo local.

2º Si $f'(x)<0$ a la izquierda de a y $f'(x)>0$ a la derecha de a entonces f tiene en a un mínimo local.

3º Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a la derecha y a la izquierda de a entonces f no tiene un extremo relativo en a . Se dice que f tiene en a un punto de inflexión. (Anaya 77, p. 151).

En el caso del libro de Anaya, el razonamiento se hace a partir de la primera derivada.

En el libro del Grupo Cero, las reglas para el cálculo de los valores máximos y mínimos, se van dando a medida que se va estudiando el problema relacionado con los marcos rectangulares, de esta forma se van aplicando cada uno de los criterios, observando e interpretando los resultados que se obtienen en cada caso.

d68: CRITERIO 1.- Estudiar los valores de la función para valores de x próximos a 1, unos por la izquierda y otros por la derecha.

CRITERIO 2.- Estudiar el signo de la derivada de $y=f(x)$ para valores próximos a 1, unos a la izquierda y otros a la derecha.

CRITERIO 2 (PERFECCIONADO).-

- Para poder desembarazarse definitivamente de la objeción, deberíamos poder afirmar que, siendo h próximo a $\pm$ y positivo:
- Para *todos* los puntos de algún intervalo $[1-h, 1[$ la derivada es negativa.
- Para *todos* los puntos de algún intervalo $]1, 1+h]$ la derivada es positiva, es decir, deberíamos estudiar el signo de la derivada en todos los puntos de un intervalo $[1-h, 1+h]$ (Grupo Cero, pp. 103-04).

Se utilizan términos como “valores próximos a 1”, que hacen referencia a un entorno del 1 de una forma totalmente intuitiva, y otros como “a la izquierda y la derecha de 1”, que hacen referencia a la representación del número real en la recta numérica (en los libros anteriores se indica esta misma situación de la forma $f(x)>0$ y $f(x)<0$, haciendo referencia, por lo tanto, a los valores de la función y la relación de orden establecida en el conjunto de los números reales). Las expresiones utilizadas son, por tanto, como pistas para visualizar los pasos que hay que dar. El último de los criterios, surge como consecuencia de que el segundo no es definitivo ante funciones que no se “comportan bien”, haciendo referencia a que estas funciones no son con las que estamos acostumbrados a trabajar. El estudio que se propone hacer con los dos primeros criterios, está basado en el cálculo para algunos puntos cercanos a 1. Se trata de un estudio de tipo inductivo, si para ciertos puntos se comporta de una cierta manera, deducimos que para todos lo próximos se comporta de la misma manera, y como consecuencia, se obtiene el caso en el que las funciones no se comportan bien, de ahí la necesidad de incluir la palabra *todos* en el último criterio en relación con los puntos que están en un intervalo de aquél que se está estudiando. Los intervalos semiabiertos se designan mediante el símbolo $] \text{ en lugar del paréntesis.$

d69: Para localizarlos se procede así:

1º Sus abcisas se obtiene resolviendo la ecuación

$$f'(x)=0$$

2º Si x_i es una raíz de la ecuación anterior, $(x_i, f(x_i))$ es un punto singular. (Anaya 88, p. 256)

Para decidir si un punto singular de abcisa x_0 (del cual ya se sabe que $f'(x_0)=0$) es máximo o mínimo, se ha de ver su segunda derivada.

Si $f''(x_0)>0$, hay un mínimo relativo en $(x_0, f(x_0))$.

Si $f''(x_0)<0$, hay un máximo relativo en $(x_0, f(x_0))$.

Si $f''(x_0)=0$, posiblemente haya un punto de inflexión, pero podría ocurrir que fuera máximo o mínimo si también $f''(x_0)$.

(Anaya 88, p. 261).

En esta regla, se dan los pasos sucesivos de localización de puntos máximos y mínimos de forma algorítmica, en lugar de las reglas alternativas que se han utilizado en otros libros de este periodo, y de una forma similar al libro del Grupo Cero. Se aplica el criterio de la segunda derivada, en este caso de forma alternativa, estudiando las diferentes posibilidades de su valor en relación con el cero. Los puntos de la curva se expresan mediante coordenadas cartesianas, lo que resulta ser una reminiscencia de la influencia de la matemática moderna que se ha visto en este periodo.

4.3.2.10.- Teoremas.

Entre los **teoremas** que permiten establecer las reglas anteriores, hemos encontrado los siguientes:

d70: Sea f una función definida en un intervalo abierto I . Si f tiene en a un extremo local y además f es derivable en a entonces $f'(a)=0$.

(Anaya77, p. 149).

d71: Teorema:
Sea $f'(a)=0$. Si $f''(a)>0$ entonces f tiene en a un mínimo local. Si $f''(a)<0$ entonces f tiene en a un máximo relativo.

(Anaya77, p. 152).

d72: Si una función $y=f(x)$ tiene un máximo o un mínimo para $x=a$ y existe $f'(a)$, entonces debe ser $f'(a)=0$.

(Grupo Cero, p. 102).

En ellos, no se utilizan expresiones como “la condición necesaria y suficiente” sino enunciados del tipo “si...entonces”. El teorema expuesto por el Grupo Cero no impone ninguna condición sobre el dominio de definición de la función.

Unidades de información	Marcos de Lanuza				Anaya 77				Grupo Cero				Anaya 88			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
d1					T1	T6	E11	T16					T1	T6	E11	T16
d2, d3, d8, d9, d11, d16, d19													T1	T6	E11	T16
d4, d17					T1	T6	E11	T16								
d5, d6									C1	C6	C11	C16				
d7, d21									C1	C6	E11	C16				
d10, d12, d20									C1	C6	T11	C16				
d13, d14, d15, d18					T1	T6	T11	T16					T1	T6	T11	T16
d22, d23, d29, d33, d34, d35, d39, d40, d41, d54					T1	E6	E11	E16					T1	E6	E11	E16
d24, d27, d28, d32, d36, d47, d48, d50, d51, d55, d56, d57, d58													T1	E6	E11	E16
d25, d26, d30, d31													E1	E6	E11	E16
d37, d38, d42, d43, d45, d46, d49					T1	E6	E11	E16								
d44, d52													T1	E6	T11	E16
d53					E1	E6	E11	E16					E1	E6	E11	E16
Caracter	-	-	-	-	T	E	E	E	C	C	E/T/C	C	T	E	E	E
d59	T2	T7	E12	T17												
d60, d61					T2	T7	E12	E17								
d62									C2	C7	C12	C17				
d63									T2	T7	C12	C17				
d64													E2	C7	E12	E17
d65													C2	C7	E12	E17
d66	T2	T7	T12	T17												
d67					T2	T7	T12	T17								
d68									C2	T7	C12	C17				
d69													T2	T7	T12	T17
d70, d71	T2	T7	E12	E17												
d72									T2	T7	C12	E17				
Carácter	T	T	E/T	E/T	T	T	E/T	E/T	T/C	T/C	C	E/C	E/C/T	T/C	E/T	E/T

Tabla 4.3.1: Descripciones de los libros del periodo 75-95

4.3.3.- Tablas

En el libro de Marcos de Lanuza no se incluye ninguna tabla de ningún tipo, ni siquiera a la hora de representar funciones gráficamente y, curiosamente, tampoco en el libro de Anaya del año 1988 a pesar de ser muy reciente. Aunque si se describe el proceso de representación gráfica de funciones, no se recogen los datos de este proceso en ninguna tabla.

4.3.3.1.- Tablas de descripción local.

Sólo en el libro del Grupo Cero encontramos tablas de descripción local para representar gráficamente las funciones: una cuártica, una función racional y una cúbica. Se estudia el signo de la primera derivada para establecer el crecimiento, decrecimiento y puntos críticos. Son tablas en las que además de símbolos numéricos, algebraicos y relacionales ($>$, $<$) se incluyen palabras propias de la lengua habitual. Los símbolos operacionales utilizados son $+$ y $-$, cuyo significado está relacionado con el crecimiento o decrecimiento, respectivamente, de la función. Los términos de la lengua habitual que se utilizan son: *decrece*, *crece* para expresar la propiedad de la función en un determinado intervalo. El aspecto de la tabla es rústico, dándoles un tono de ejercicio que se ha realizado de forma manual, en lugar de las tablas perfectamente cuadrículadas que dan la impresión de algo formal totalmente terminado y expresan un resultado, más que la acción relativa a su elaboración la tabla. En una de las tablas el proceso de su construcción está a medias y se deben completar las casillas en blanco y en la otra, que ya está finalizada, se presenta como resultado de la elaboración. Una característica distintiva de estas tablas, es el estudio del signo de la derivada de la función en cada uno de los intervalos determinados por los puntos estacionarios.

Para esbozar la gráfica de la función: $y=x^4-10x^2+21$

<i>intervalo</i>	<i>signo de</i>				<i>Comportamiento de y en ese intervalo</i>
	$x+\sqrt{5}$	x	$x-\sqrt{5}$	y'	
$x<-\sqrt{5}$	-	-	-	-	<i>decrece</i>
$-\sqrt{5}<x<0$					
$0<x<\sqrt{5}$					
$\sqrt{5}<x$					

t1: (Grupo Cero, p. 131)

Las casillas vacías de la tabla anterior, indican un proceso que hay que completar, mientras que en la tabla siguiente, aparecen ya rellenas como ilustración del resultado que se puede producir.

Gráfica de la función $y=x^3-x^2$

<i>intervalo</i>	<i>signo de</i>			<i>Comportamiento de y en ese intervalo</i>
	x	$x-2/3$	y'	
$x<0$	-	-	+	<i>crece</i>
$0<x<2/3$	+	-	-	<i>decrece</i>
$2/3<x$	+	+	+	<i>crece</i>

t2. (Grupo Cero, p. 134).

4.3.3.2.- Cuadros de variación.

En el libro de Anaya, encontramos algún cuadro de variación relacionado con el cálculo de máximos y mínimos de una función cuadrática, una cúbica y una función definida a trozos. En estos casos, sólo se incluyen la derivada primera y la propia función, en este orden. En estas tablas sólo se utilizan símbolos matemáticos: números, signos de operaciones aritméticas o flechas para nombrar y visualizar el crecimiento y el decrecimiento. El símbolo 0, indica no sólo que la derivada en ese punto es 0, sino que tendremos un extremo en dicho punto, es por lo tanto un índice de ese tipo de puntos, al igual que los símbolos + y – respecto del crecimiento y el decrecimiento. El caso siguiente es el de la función cuadrática:

Estudio de la función $f(x) = x^2 - 6x + 4$:

x	$-\infty$	3	∞
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-5	$+\infty$

t3: (Anaya 77, p. 148).

Pero cuando se realiza el estudio de la representación gráfica de funciones, se incluye también la derivada segunda, en la que se analiza también, la concavidad y la convexidad. En el libro de Anaya se incluyen dos tablas de este tipo, una para una función que es una cuártica, y otra para una función no derivable en un punto y con un radical. Se introduce un nuevo símbolo, que es una flecha vertical para indicar que en ese punto la tangente es vertical:

Estudiar la función $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$

	$-\infty$	$-\left(\frac{3}{2}\right)^2$	-1	0	∞
$f'(x)$	+	+	0	↑	+
$f''(x)$		-		↑	-
$f(x)$	$-\infty$		1	0	$+\infty$

t4: (Anaya 77, p. 175).

En la siguiente tabla, se resumen las características de todas aquellas que hemos analizado respecto del periodo 67-95.

Unidades de información	FML				Anaya 77				Grupo Cero				Anaya 88			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
t1									T3	C8	C13	C18				
t2									T3	C8	C13	C18				
t3					C3	T8	T13	T18								
t4					C3	T8	T13	T18								
-	E3	E8	E13	E18									E3	E8	E13	E18
Carácter	E	E	E	E	C	T	T	T	T	C	C	C	E	E	E	E

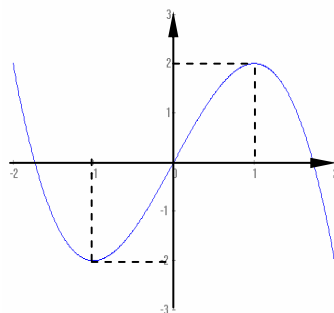
Tabla 4.3.2: Tablas de los libros del periodo 75-95

4.3.4.- Gráficas

4.3.4.1.- Ábacos.

Entre las gráficas de tipo ábaco, están las que se utilizan para estudiar gráficamente una función particular, es decir, a partir de la representación simbólica de la función se calculan sus extremos y luego se representa gráficamente resaltando los puntos críticos. En estos casos, no se estudia la función más que en los valores que anulan la derivada, representando sus coordenadas en el plano cartesiano, e indicando la posición del punto mediante líneas punteadas, que enfatizan el carácter de ábaco que tiene esta representación.

Estudio de la función¹⁷ $f(x)=3x-x^3$



g1: (Anaya 77, p. 149)

En relación con la construcción de esta gráfica, se hace la siguiente anotación en el libro de Anaya:

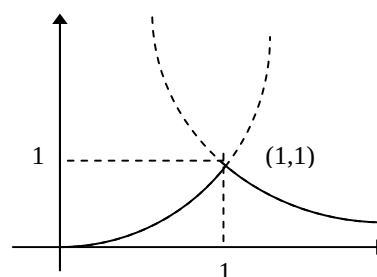
La cuestión de ser un máximo o mínimo local depende de lo que ocurre en las proximidades de los puntos. Hay un extremos relativo cuando cambia en el punto el sentido de crecimiento de la función. (Anaya 77, p. 149).

¹⁷ Posteriormente (p. 155) la función anterior se utiliza para estudiar los extremos de la función $g(x)=|3x-x^3|$ ya que como no es una función derivable, sus extremos no se pueden estudiar a partir de la derivada pero si a partir de la gráfica anterior, haciendo las modificaciones oportunas.

Se incluyen representaciones de funciones con puntos extremos que no son derivables en dichos puntos. De esta forma, se dan contraejemplos que confirman el teorema que establece el cálculo de los puntos extremos a partir de la derivada. En este caso se trata de una función definida a trozos a partir de una parábola y una hipérbola.

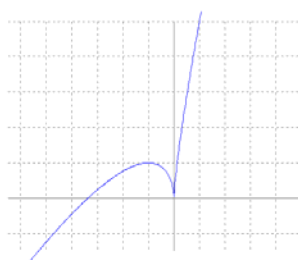
g2: Estudio de $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [1,+\infty] \end{cases}$

En todos los puntos de extremo local la derivada es nula excepto en el ejemplo 3. En este caso la función tenía un máximo local en 1, pero la función no era derivable en 1. Se podría, por tanto, sacar la conclusión que si una función tiene un extremo relativo en un punto en que es derivable, la derivada ha de ser nula. (Anaya 77, p. 149).



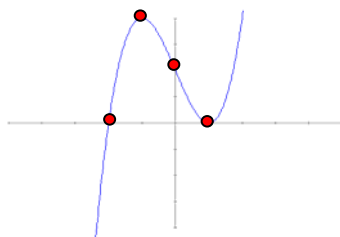
Cuando se representan gráficamente funciones, normalmente se resaltan tanto los ceros, como los puntos críticos, bien especificando sus coordenadas como es el caso siguiente, bien utilizando “puntos gordos”, en las posiciones que ocupan dichos puntos en la curva. La gráfica presentada a continuación, indica el máximo, y el punto de corte con el eje OX. Se utiliza, además, una cuadrícula para resaltar más el aspecto de ábaco de la gráfica, es decir, poder relacionar puntos de la curva con posiciones en el plano a través de sus coordenadas. En este caso, no se marca el máximo de alguna forma característica, como con una tangente horizontal, para diferenciarlo del resto de los puntos de la gráfica.

g3: Estudiar la función $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x^2}$ (Anaya 77, p. 175).



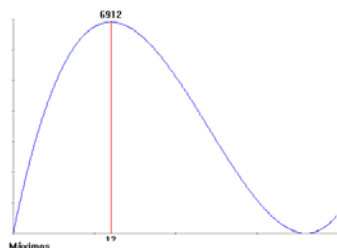
En el último libro de Anaya (1988), también se encuentran este tipo de gráficas en relación con los puntos críticos, resaltándolos por medio de puntos gordos de otro color:

g4: La función $y=x^3-3x+2$, representando en rojo los datos obtenidos.



(Anaya 88, p. 256)

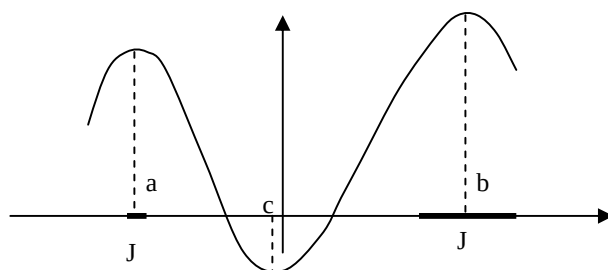
Otras veces, se utiliza la representación gráfica de la función en relación con los problemas de optimización, de forma que se visualicen los máximos o mínimos correspondientes, y se asocien con el resto de los puntos de la función. Por ejemplo, para la función $y=x^3-72x^2+1296x$, para la que se pretende encontrar un máximo, la representación resulta:



g5: (Anaya 88, p. 269).

4.3.4.2.- Mensajes topológicos locales.

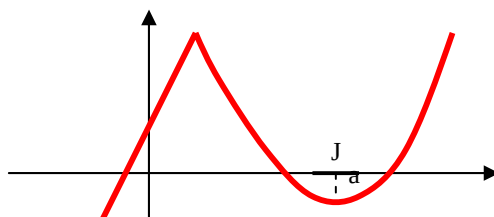
En los libros de Marcos de Lanuza y de Anaya, encontramos gráficas que podemos incluir dentro del grupo de mensaje topológico. En el de Anaya, tenemos dos gráficas de este tipo, una en relación con los máximos:



g6: La función f definida en un intervalo, no determinado, tiene dos máximos relativos en a y en b . En la gráfica se han señalado los intervalos J que indica la definición.

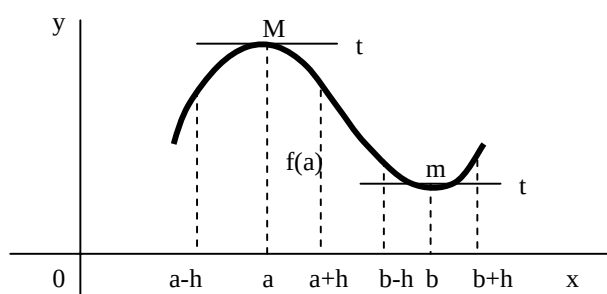
Se observa que dicho intervalo J puede ser de mayor o menor longitud. (Anaya 77, p. 147)

Y otra en relación con los mínimos.



g7: En la gráfica se observa que f , tiene un mínimo local en a . En el ejemplo anterior la función tenía un mínimo local en c . (Anaya77, p. 147)

En el libro de Marcos de Lanuza la gráfica utilizada representa, al mismo tiempo, los máximos y mínimos.



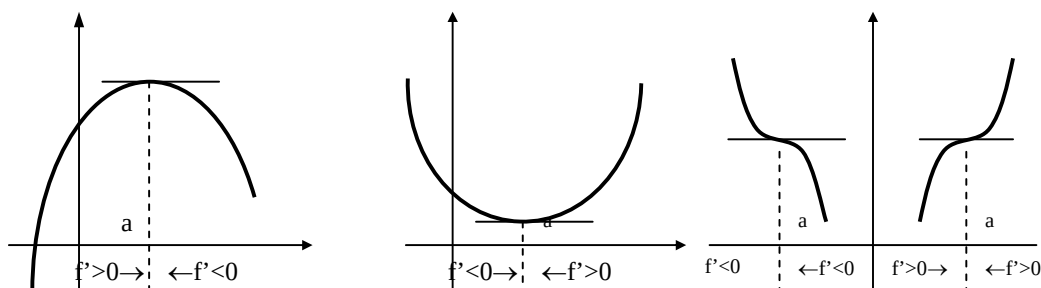
g8: (FML, p. 125).

En todos los casos, se representa el intervalo en el que está la abscisa del punto crítico en negrita (Anaya) o marcando sus extremos (FML), y mediante líneas punteadas, se señala cuál es ese punto de la gráfica que constituye un punto crítico. Se hace hincapié en el carácter relativo de estos puntos, puesto que el estudio se realiza de una forma local, en el entorno del punto en cuestión, este estudio local viene caracterizado por el uso de la negrita o las marcas del intervalo, para resaltarlos, y se focaliza la atención en el punto, mediante las líneas punteadas. A pesar de ello, este tipo de representación se puede considerar topológica parcialmente, porque se resalta sólo el intervalo correspondiente a la variable independiente, y no se hace la correspondencia con el intervalo apropiado de la variable dependiente.

4.3.4.3.- Ideogramas.

Hemos encontrado ideogramas, tanto en el libro de Anaya como en el del Grupo Cero. En el primero, se utilizan para representar y poder visualizar las reglas de determinación de los extremos relativos. Los puntos críticos se señalan mediante segmentos tangentes horizontales, que nos indican cuál es el valor extremo, y las líneas punteadas le hacen corresponder su abscisa. Se realiza además una correspondencia entre el comportamiento de la curva a la derecha y a la izquierda del punto, con un determinado

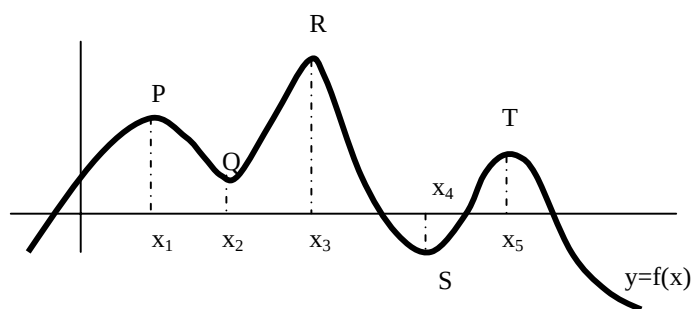
rango de valores de la función derivada, que está relacionado con el crecimiento o decrecimiento de la función. Este tipo de gráficas se aportan como imágenes que sirvan a modo de reglas “casi nemotécnicas” para recordar fácilmente el proceso de cálculo de los puntos críticos, son imágenes visuales, que sirven de estímulo para recordar las propiedades de los puntos en cuestión.



g9, g10, g11: No hace falta acordarse de los tres apartados pues un sencillo dibujo es suficiente para captar la situación. En general se puede decir que f tiene extremo relativo en a cuando la derivada cambia de signo al pasar por a . Tiene punto de inflexión cuando no cambia. (Anaya 77, p. 151).

En el libro del Grupo Cero hemos encontrado dos ideogramas similares, uno más esquemático que otro. El primero aparece en la introducción de los conceptos relativos a máximos y mínimos, y por ello resalta la relación entre la ordenada, que visualmente aceptamos como extremo relativo, y la abscisa correspondiente. Hace énfasis, por lo tanto, en que el máximo es el “punto que está más alto que sus vecinos”. En dicha gráfica aparecen diferentes máximos y mínimos, con objeto de resaltar el carácter relativo de dichos puntos, y se observa, por lo tanto, que hay puntos “más bajos” que algunos mínimos, y puntos más altos que algunos máximos.

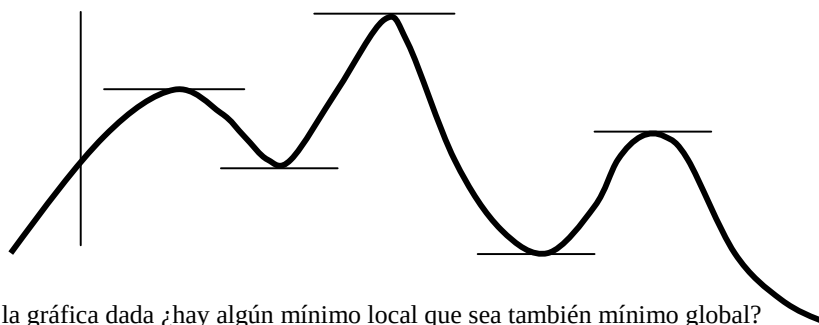
g12: La función representada en la gráfica tiene máximos y tiene mínimos.



Decimos pues que la función tiene en P, R y T MÁXIMOS LOCALES y en Q y S tiene MÍNIMOS LOCALES. (Grupo Cero, p. 101).

En cambio, en la otra gráfica, se resalta que en los puntos extremos la tangente a la curva es horizontal, a partir de lo cual, se expresa la primera regla para la determinación de los puntos extremos. Este caso es especialmente particular, ya que ni siquiera se representa el eje de abscisas ni, por lo tanto, los valores de la variable independiente correspondientes a dichos extremos. Se quieren mostrar sólo los extremos de la curva, sin hacer referencia a sus coordenadas. La condición de que la derivada sea nula en dichos puntos, es de carácter

global, mientras que la relación que se ha establecido con los puntos del entorno, en la gráfica anterior, es más bien de tipo local.



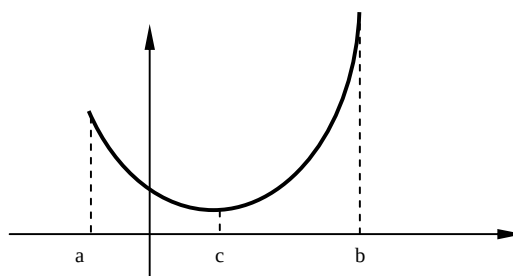
g13: En la gráfica dada ¿hay algún mínimo local que sea también mínimo global?

¿De qué modo las derivadas pueden ayudar a encontrar esos puntos? La respuesta es inmediata, porque si se trazan las tangentes en ellos, esas tangentes son paralelas al eje de abscisas, luego tienen como pendiente 0. (Grupo Cero, p. 102).

En estos libros, encontramos también ideogramas que presentan las diferentes posibilidades de existencia de un extremo:

- a) que la función sea derivable y la derivada en el punto sea cero.
- b) que la función sea derivable, la derivada no sea nula y el extremo corresponda a un extremo del intervalo de definición.
- c) que la función sea derivable con derivada cero en el punto, y éste no sea un extremo.
- d) que la función no sea derivable en el punto.

La primera y segunda posibilidad las encontramos en el libro de Anaya donde está el siguiente ideograma, que representa la posibilidad de la existencia de distintos tipos de extremos, en relación con una función derivable: los que se obtienen a partir de la anulación de la derivada y los que se obtienen en comparación con el resto de los puntos de la función. Los primeros se obtendrían mediante un estudio local, que garantizaría su condición de relativos, y los segundos se refieren a un estudio de tipo global, en relación con el resto de los puntos de la función. La explicación ofrecida en el libro, utiliza algunos términos como el que la función se refiera a un dominio de definición relacionado con un intervalo cerrado y que se considere un punto c interior al intervalo, que intentan aclarar el sentido que se le da al concepto.



g14: Por ejemplo, en la figura 10 el mínimo se encuentra en un punto interior: c . Sin embargo, el máximo está en b que es un extremo del intervalo $D=[a,b]$.

En consecuencia: *suponiendo* que una función derivable f tenga máximo absoluto en un intervalo D , éste se encuentra entre alguno de los siguientes puntos:

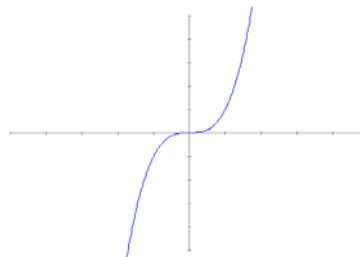
Puntos de D donde f' se anula.

Puntos extremos de D contenidos en D .

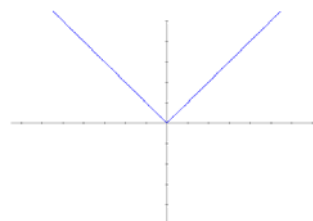
(Anaya 77, p. 156).

En el libro del Grupo Cero aparecen las otras dos posibilidades. En primer lugar tenemos el caso en que la derivada de la función se anula en un punto, pero no es un extremo. El caso más típico es el de la cúbica $y=x^3$ que en el punto $x=0$ tiene un punto de inflexión. El otro caso es el de una función que tiene un mínimo, pero no es derivable en dicho punto. En este caso se ha utilizado la función valor absoluto de x , que tiene un mínimo en $x=0$. En ambos casos se representa la función sin ninguna referencia a los puntos que se están estudiando. La gráfica es totalmente esquemática, y aunque aparecen los ejes cartesianos, lo que interesa es la imagen que produce la curva, sin ninguna otra referencia.

g15: Puede ocurrir que $f'(a)=0$ y que no haya máximo ni mínimo.



g16: Puede ocurrir que haya máximo o mínimo en $x=a$ y que no exista $f'(a)$; un ejemplo es $f(x)=|x|$ en $x=0$



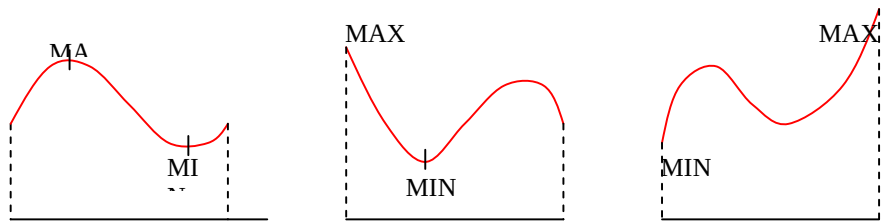
(Grupo Cero, p. 105).

En el libro de Anaya (1988), encontramos sendas gráficas relacionadas un punto de inflexión, resaltando el cambio de convexidad en el punto, y cómo la tangente separa dos partes de la curva, una por encima y otra por debajo.



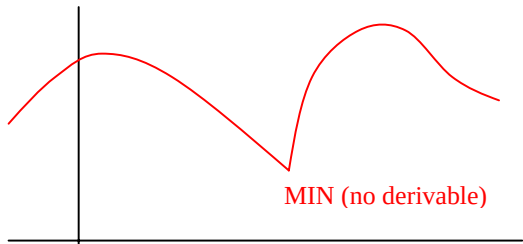
g17, g18: (Anaya 88, p. 260).

También se utilizan los ideogramas, para mostrar las diferentes posiciones que ocuparán los máximos y los mínimos en un intervalo:



g19, g20, g21: (Anaya 88, p. 271)

En la primera de las gráficas, el máximo y el mínimo son interiores al intervalo, en la segunda el máximo es uno de los extremos del intervalo, siendo en este caso un extremo absoluto, en el último tenemos representados dos extremos absolutos en los dos extremos del intervalo considerado. Incluso cuando la función no es derivable, éste libro no proporciona un ejemplo gráfico que ilustra la situación:



g22: (Anaya 88, p. 271)

Unidades de información	FML				Anaya 77				Grupo Cero				Anaya 88			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
g1, g2					T4	T9	T14	E19								
g3					T4	T9	T14	C19								
g4													T4	T9	T14	C19
g5													T4	T9	T14	T19
g6, g7					E4	E9	C14	T19								
g8	E4	E9	C14	E19												
g9, g10, g11					E4	C9	E14	E19								
g12, g13									E4	C9	E14	E19				
g14					E4	C9	C14	E19								
g15, g16									C4	C9	C14	E19				
g17, g18													C4	C9	E14	E19
g19, g20, g21													E4	C9	E14	E19
g22													E4	C9	C14	E19
Carácter	E	E	C	E	E/T	E/T/C	E/T/C	E	E/C	C	E/C	E	E/T/C	C	E/T	E

Tabla 4.3.3: Gráficas de los libros del periodo 75-95

4.3.5.- Expresiones simbólicas.

Las expresiones simbólicas de las funciones se utilizan fundamentalmente en ejercicios de aplicación de los conceptos, en la aplicación de las reglas relativas a máximos y mínimos, y en la representación gráfica de dichas funciones:

e1: Calcúlense los máximos y mínimos de la función $y=x^4-x^2$. Constrúyase la gráfica de la misma (FML, p. 136).

e2: Constrúyase la gráfica de la función:

a) $y=x^3-3x^2+2x$;

b) $y=x^3-x^2-8x+8$

c) $y=(x^2-1)(x^2-4)$

d) $y=(x-2)^2(x+3)(x-4)$ (FML, p. 136)

Idem:

a) $y=\frac{x}{1+x^2}$

b) $y=\frac{2x+1}{x^2+2}$

(FML, p. 136)

e3: Constrúyase: $y=\frac{x^2}{3}-x^2-3x+5$ calculando: 1º) Máximos y mínimos. 2º) Puntos de inflexión. 3º) Tangente y normal en esos puntos. 4º) Estúdiese el crecimiento y decrecimiento de la función. (FML, p. 141).

e4: Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como $f(x) \geq 0$ para todo x y $f(0)=0$ está claro que $f(0) \leq f(x)$ para todo x . Con esto queda claro que f tiene en 0 un mínimo relativo. (Anaya77, p. 154)

e5: Hallar los máximos y mínimos relativos $f(x)=|x|$. ¿Tiene esta función algún punto de tangente horizontal? (Anaya77, p. 147).

e6: Determinar los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

...

e) $f(x)=|x-3|$

f) $f(x)=|x|+|x-1|$ (Grupo Cero, p. 106)

Los dos primeros se diferencian de los del libro de Marcos de Lanuza, en el sentido de que no se da la expresión algebraica de la función, sino que se describe parte de su comportamiento local, y se da el valor de la función en los puntos extremos. A partir de esta definición, se trata de esbozar la gráfica, con cierta exactitud respecto del comportamiento en dichos puntos extremos. Es la primera vez que encontramos en la literatura este tipo de ejercicios. Los últimos problemas, constituyen un caso particular de punto mínimo ya que la funciones no son derivables en el punto (0,0) y, por lo tanto, se propone para aplicar, tanto la definición de mínimo, como la regla de cálculo, comprobando que sólo es una condición suficiente.

En el libro del Grupo Cero tenemos además el problema:

e7: Hallar las coordenadas del punto de la gráfica de $y=x^2-x+3$ en que la tangente a la gráfica es paralela a:

1º.- La recta $y=0$

2º.- La recta $y=3x+1$. (Grupo Cero, p. 107).

Aunque no se incluye ninguna de las palabras clave (máximo, mínimo, punto estacionario,..) se dice que hay que buscar un punto en el que la tangente es cero y se presenta un paralelismo con el cálculo de otro punto, en el que la tangente tiene una pendiente distinta de cero.

En el libro de Anaya 88 también se incluyen algunos problemas acerca de la expresión simbólica de las funciones.

e8: La curva $f(x)=x^3-3x+2$ verifica lo siguiente: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;

corta a los ejes en (0,2), (1,0), y (-2,0); tiene un mínimo en (1,0) y un máximo en (-1,4).

Dibuja su gráfica. (Anaya 88, p. 258).

En él, además de proporcionar la expresión algebraica de una función, están calculados todos los puntos que se necesitan para representar correctamente dicha función, con lo cual la información es redundante. La función en sí misma es muy sencilla, por lo que no parece lógico aportar tanta información en un mismo problema.

4.3.5.1.- Expresiones algebraicas polinómicas:

- Cuadráticas.

e9: $y = \frac{x^2}{3} - x^2 - 3x + 5$ (FML, p.)

$$y = 1 - (x-1)^2; y = 3x^2 - 2x + 5 \text{ (Anaya 88, p.)}$$

Función cuadrática cuyos ceros no tienen coordenadas enteras y el máximo se obtiene a partir de una ecuación, por lo tanto, de una ecuación lineal. Destaca el que tenga dos coeficientes en x^2 lo que no es habitual uno entero y el otro una fracción irreducible.

- Cúbicas.

e10: $y=x^3-3x^2+2x$; $y=x^3-x^2-8x+8$ (FML, p.)

$$y = x^3 - 3x + 1; y = x^3 + x^2 - x; y = x^4 - 4x^3; y = x^3 - 3x; y = x^3 - 3x^2 + 4x;$$

$$y = x^3 - 3x + 4; y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x; y = x^3 - 6x^2 + 8x; y = x^3 + 1 \text{ (Anaya88, p.)}$$

- Cuárticas.

e11: $y=x^4-x^2$; (FML, p.)

$$y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \text{ (Anaya 88, p.)}$$

4.3.5.2.- Expresiones algebraicas polinómicas factorizadas:

e12: $y=(x^2-1)(x^2-4)$; $y=(x-2)^2(x+3)(x-4)$ (FML, p.)

4.3.5.3.- Expresiones racionales:

e13: $y = \frac{x}{1+x^2}$; $y = \frac{2x+1}{x^2+2}$ (FML, p.)

$$y = \frac{x^2}{x^2-9}; y = \frac{6x}{x^2+1}; y = \frac{x^2+1}{x^2-1}; y = \frac{6x}{x^2+1}; y = \frac{x^2+9}{x^2-4}; y = \frac{x^3}{x^2-1}; y = \frac{x^2}{x^2+1};$$

$$y = \frac{2-x}{x+1} \text{ (Anaya 88, p. 265)}$$

4.3.5.4.- Expresiones trascendentes exponenciales:

e14: $y=xe^x$ (Anaya 88, p. 265).

4.3.5.5.- Expresiones trascendentes logarítmicas;

e15: $y=\ln(x+1)$ (Anaya 88, p. 265)

Unidades de información	FML				Anaya 77				Grupo Cero				Anaya 88			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	Sc
e1, e2, e3	T5	T10	T15	T20												
e4					T5	E10	E15	C20								
e5					T5	C10	E15	T20								
e6									T5	C10	E15	T20				
e7									T5	T10	E15	T20				
e8													T5	T10	C15	T20
e9, e10, e11	T5	T10	T15	T20									T5	T10	T15	T20
e12	T5	C10	T15	T20												
e13	T5	C10	T15	T20									T5	C10	T15	T20
e14, e15													T5	T10	T15	T20
Carácter	T	T	T	T	T	E/C	E	C/T	T	C/T	E	T	T	T	T	T

Tabla 4.3.4: Expresiones simbólicas de los libros del periodo 75-95.

4.3.6.- PERFILES

4.3.6.1.- *Perfil de Marcos de Lanuza.*

En libro de Marcos de Lanuza, se tratan todos los conceptos pertenecientes al currículo, aunque no se concede ninguna importancia a la intuición; desarrollando, en cambio, una fuerte formalización en definiciones y teoremas. Se siguen las mismas orientaciones que se establecieron para el periodo anterior, por lo que puede considerarse que se mantiene dentro de la corriente de la matemática moderna. No hay ningún problema relacionado con ninguno de los contextos considerados, es un libro de corte teórico en el que ni siquiera se plantea la aplicación de técnicas o reglas a situaciones problemáticas. Tampoco hay ninguna referencia o alusión a la sociedad actual

Entre los términos usados hay pocos o ninguno de carácter intuitivo, en las definiciones sólo se han utilizado símbolos matemáticos, siendo una característica predominante la fuerte formalización. Entre las expresiones utilizadas en relación con las funciones, sólo hay funciones polinómicas o racionales, siendo, por tanto, la diversidad muy reducida. La estructura de los enunciados de los problemas es totalmente rigurosa y clásica, sin que haya lugar a la interpretación, la presentación de una situación desarrollada,... No hay interacción entre los distintos tipos de representaciones, éstas aparecen parceladas sin ninguna relación ni traducción entre ellas.

No se incluyen contextos referidos a áreas distintas de la matemática y, respecto de éstas, sólo se presentan de forma teórica. Incluso dentro de las matemáticas, prácticamente sólo se hace hincapié en los propios conceptos del Análisis, sin integrar otras áreas como aritmética, geometría euclídea, geometría cartesiana y trigonometría, como suele ser habitual. Además, las soluciones que se obtienen en los problemas son de tipo algorítmico.

La presentación de los conceptos, problemas, definiciones, etc. es totalmente estática. Las herramientas utilizadas en el libro son más bien de corte tradicional, siendo muy grande la diferencia con el resto de los libros de este periodo. La aplicación de los conceptos relativos a puntos extremos, no se lleva a cabo ni en problemas de optimización ni en ejercicios de representación gráfica de funciones.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema			
	Descripciones teóricas		*	
	Símbolos utilizados en las tablas	*		
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología			
	Tipos de descripciones		*	
	Tipos de tablas	*		
	Tipos de gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Pragmático- didáctica	Función de los ejercicios			
	Papel de las definiciones	*	*	
	Actividades relacionadas con las tablas	*		
	Actividades gráficas			*
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum			
	Influencias didácticas	*	*	
	Aplicación de las tablas	*		
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.3.5: Perfil del libro de Marcos de Lanuza

El libro de Marcos de Lanuza es un libro **expositivo** en el que se hace cierto énfasis en la técnicas, pero que se puede considerar que sigue el mismo esquema que los libros del periodo anterior, resultando ciertamente obsoleto. Los aspectos comprensivos están totalmente ausentes en este libro, siendo las protagonistas del libro las definiciones en torno a las que gira su desarrollo.

4.3.6.2.- Perfil de Anaya 77.

El libro de Anaya⁷⁷, sigue los contenidos y orientaciones especificadas en el currículo, se hace énfasis en la aplicación de los conocimientos adquiridos y a la práctica de ejercicios rutinarios, que se convierten en ejercicios para afianzar técnicas de cálculo. El tipo de definiciones de los conceptos es muy formal, sin dejar lugar a la intuición, y se presentan algunas aplicaciones a ámbitos científicos, sociales y económicos, como reacción a los libros de la etapa anterior, que eran más teóricos. A pesar de ello, la mayoría de los problemas presentan situaciones estrictamente matemáticas. Este libro representa la mayoría de los libros de este periodo y marcará una forma de hacer, seguida incluso en la etapa siguiente.

Los términos que se usan en las definiciones son bastante abstractos, siendo muy habitual la utilización de símbolos matemáticos lógicos y relacionales. Se manejan distintos tipos de funciones, y aunque predominan las polinómicas, aparecen aisladamente otros tipos, incluso alguna de ellas relacionada con el valor absoluto. La estructura de los enunciados es muy tradicional, siendo muy frecuentes las expresiones del tipo “Si...entonces...”. Algunas veces se trabaja simultáneamente con diferentes tipos de

representación, tanto en casos concretos, como en otros más teóricos, planteándose algunos problemas en los que se describe una función, para que posteriormente se realice su gráfica.

Se puede considerar que hay un equilibrio entre los diferentes tipos de problemas propuestos, matemáticos y no matemáticos, aunque se echa de menos alguno de ellos como los relacionados con la Física. Dentro de los conceptos matemáticos, no hay referencias a otros conceptos que no estén relacionados con el propio Análisis, la Aritmética, la Geometría Euclidea y la Cartesiana. Las interpretaciones que se hacen de los resultados son fundamentalmente cuantitativas, y las conclusiones son algorítmicas.

La presentación del contenido se hace de forma absolutamente estática, los problemas aunque son escolares se han adaptado algunos datos y contextos para darles una apariencia real. Se utilizan algunas herramientas relativas a la impresión, como imágenes, gráficas, utilización del color en casos concretos, márgenes con notas y gráficos explicativos, recuadros para resaltar las definiciones y teoremas. Las aplicaciones se refieren tanto a la optimización como a la representación gráfica de funciones.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema		*	
	Descripciones teóricas		*	
	Símbolos utilizados en las tablas			*
	Símbolos utilizados en las gráficas	*	*	
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología	*		
	Tipos de descripciones		*	
	Tipos de tablas		*	
	Tipos de gráficas	*	*	*
	Tipos de expresiones simbólicas	*		*
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*		
	Papel de las definiciones	*	*	
	Actividades relacionadas con las tablas		*	
	Actividades gráficas	*	*	*
	Papel de las expresiones simbólicas	*		
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum	*		
	Influencias didácticas	*	*	
	Aplicación de las tablas		*	
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	*

Tabla 4.3.7: Perfil del libro de Anaya 77

El libro de Anaya del año 77 es un libro **tecnológico** a la vista del perfil que posee. Hay que destacar, a pesar de ello, el fuerte carácter expositivo de algunas de las representaciones y la escasez de cualidades ligadas a la comprensión y a la visualización de los conceptos, a pesar del año en que fue escrito el libro. En el tipo de definiciones utilizadas se observa claramente la influencia de la llamada matemática moderna.

4.3.6.3.- *Perfil del libro del Grupo Cero.*

El libro del Grupo Cero se adapta al currículo, pero introduce formas de hacer totalmente novedosas para su época, de forma que se apoya en las intuiciones para definir formalmente los conceptos, y hace énfasis en la resolución de problemas. Hay bastante influencia de las algunas corrientes epistemológico-didácticas que se están desarrollando en ese momento, y que da lugar a numerosas gráficas y esquemas, que sirven de apoyo intuitivo a los conceptos, situaciones pertenecientes a ámbitos muy diversos, notándose la influencia de la fenomenología de Freudenthal, y de las recientes teorías sobre resolución de problemas. Hay algunas referencias a la sociedad del momento en los enunciados de los problemas: marcos de ventana, calderas, envases de cocina, depósitos para la tintorería. A pesar de ello, no influyó mucho en los libros de la época, ni siquiera en los libros posteriores, en los que no se ha encontrado nada similar.

El uso de términos formales es más bien escaso, se utilizan en su lugar términos más intuitivo, tanto para introducir las definiciones como para enunciar las reglas, teoremas y en el enunciado de los problemas. Hay un equilibrio en el tipo de funciones consideradas, de tal forma que prácticamente hay alguna de cada tipo, añadiéndose funciones definidas a trozos y otras en las que simplemente se da una descripción verbal de sus características. Los enunciados se expresan de forma explicativa de forma que no hay los típicos problemas estándar. Se incluyen diferentes tipos de representación, de forma que se obtenga una imagen del concepto ajustada a las diferentes posibilidades.

El tipo de situaciones, está equilibrado entre diferentes áreas, incluyendo contextos de tipo económico, cotidiano, y situaciones de tipo matemático. Entre estas últimas, también hay una gran diversidad, de forma que además de contenidos aritméticos o geométricos, se incluyen otros. La mayoría de las interpretaciones son de tipo cualitativo, como analizar el tipo de envase que resulta según las dimensiones obtenidas. También en las definiciones se buscan ejemplos y contraejemplos para interpretar las conclusiones.

La presentación de los contenidos se hace de forma estática, aunque hay algunos atisbos de introducción de dinamismo, por ejemplo en la gráfica del problema de los marcos de una ventana, para estudiar cómo varía el perímetro en función del área, o el caso de las calderas. Los problemas son fundamentalmente escolares, aunque en algunos problemas los datos están adaptados a una hipotética situación real. Hay una gran utilización de herramientas de impresión, como el color, la diversidad de gráficos y tablas. Y un equilibrio entre los problemas de optimización y los ejercicios de representación gráfica de funciones.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema			*
	Descripciones teóricas		*	*
	Símbolos utilizados en las tablas		*	
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología			*
	Tipos de descripciones		*	*
	Tipos de tablas			*
	Tipos de gráficas			*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	*
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*	*	*
	Papel de las definiciones			*
	Actividades relacionadas con las tablas		*	*
	Actividades gráficas	*		*
	Papel de las expresiones simbólicas	*		
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum			*
	Influencias didácticas	*		*
	Aplicación de las tablas			*
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.3.8: Perfil del libro del Grupo Cero.

El libro del Grupo Cero es un libro de carácter **comprensivo**, aunque se ha procurado mantener el rigor en las definiciones, exponiéndolas como conclusión de ciertas observaciones realizadas a priori y no se olvida la práctica de las reglas necesarias para el cálculo de los puntos críticos con el fin de adquirir cierta destreza.

4.3.6.4.- Perfil de Anaya 88.

El libro de Anaya 88 cubre todos los contenidos referentes al Análisis Matemático especificados en los programas oficiales, muy desarrollados y ampliados. En algunos capítulos, concretamente, en el de optimización, se plantea la resolución de problemas desde el punto de vista preconizado desde la didáctica de la matemática, distinguiendo las diferentes fases de su resolución, y enfatizando ciertos procesos como son: conjeturar, observar, comparar, interpretar,.. Además, se incluyen numerosas notas históricas y cotidianas para contextualizar las situaciones y conceptos desarrollados a lo largo del libro. Se incorporan algunos elementos asociados a la sociedad del momento, como el problema de la cerca construida con tela metálica, o el del campo de fútbol, una de las mayores atracciones de la sociedad del momento. Algunos de los problemas propuestos se repetirán en la etapa siguiente, aunque podemos considerar que, incluso este libro, resulta más novedoso que muchos del citado periodo.

Se utilizan expresiones intuitivas que hacen referencia a construcciones eminentemente geométricas en relación con las definiciones y reglas que tratan sobre puntos críticos: “atraviesa”, “derecha”, “izquierda”. A pesar de ello, las mayoría de las funciones que se utilizan son de tipo algebraico, siendo muy escasas las funciones de tipo

trascendente, y no utilizándose ningún tipo de función especial o de función definida mediante una descripción. La estructura de los enunciados es clásica, a pesar de los términos intuitivos que se utilizan, se pretende dirigir al alumno en la construcción de los conceptos enseñados mediante los ejemplos y ejercicios planteados. La interacción entre los sistemas de representación es un poco reducida, aunque se plantean ejercicios en los que hay que realizar traducciones entre dichos sistemas en ambos sentidos, lo que no es frecuente en los libros de texto analizados. Dichas gráficas se utilizan como ilustración, y como ejemplos de posibles situaciones.

Hay bastantes situaciones relacionadas con ámbitos muy dispersos de la vida diaria: texto impreso, pastor, corte de un tronco de madera, fábrica, accesorios de cocina, estanque, campo de fútbol, fenómenos físicos,... Entre los conceptos matemáticos involucrados, se incluyen conceptos geométricos, que son muy abundantes, y algunos de tipo aritmético. Las interpretaciones son cuantitativas, aunque en algún problema se dan las implicaciones de los resultados, y las conclusiones son algorítmicas, aunque en las reglas que se dan para establecer los puntos críticos, se incluyen opciones y etapas para el cálculo.

La presentación de los conceptos es estática, y los problemas que se proponen son escolares. Las únicas herramientas didácticas que se utilizan, son las relativas a la impresión del libro, y no se realiza la incorporación o mención de las nuevas tecnologías como calculadoras y ordenadores, ni de otro tipo de material didáctico existente en el mercado. Se aplican los conceptos de máximos, mínimos y puntos de inflexión, tanto para los problemas de optimización, como a la representación gráfica de funciones

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema		*	
	Descripciones teóricas	*	*	*
	Símbolos utilizados en las tablas	*		
	Símbolos utilizados en las gráficas	*	*	*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología	*		
	Tipos de descripciones		*	*
	Tipos de tablas	*		
	Tipos de gráficas			*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*		
	Papel de las definiciones	*	*	
	Actividades relacionadas con las tablas	*		
	Actividades gráficas	*	*	
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum	*		
	Influencias didácticas	*	*	
	Aplicación de las tablas	*		
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.3.9: Perfil del libro de Anaya 88

El libro de Anaya del año 88 es de carácter **expositivo**, pero son numerosos los fenómenos que se plantean para practicar las definiciones y reglas incluidas en el texto. Aunque es un libro relativamente actual por la fecha de su publicación, no se refleja en el tipo de fenómenos y situaciones planteadas, de forma que no hay ningún aspecto de la sociedad del momento ni de las corrientes didácticas predominantes que se haya observado en él.

4.4.- Una nueva orientación de la enseñanza de las matemáticas bajo las orientaciones de la L.O.G.S.E.: 1995-2001.

4.4.1.- Planes de estudio y libros seleccionados.

Este periodo, comienza con la implantación de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.) en la Educación Secundaria de forma generalizada a partir del año 1995, hasta la fecha. Aunque la ley se promulgó en el año 1990 (3/10/1990), durante estos cinco años se fue implantando de forma progresiva en la enseñanza primaria, y de modo experimental se impartieron anticipadamente los Bachilleratos previstos en esta Ley. Se aumenta la enseñanza obligatoria hasta los 16 años, distinguiendo dos periodos, una enseñanza primaria (6-12 años), y una enseñanza secundaria obligatoria (12-16 años). El Bachillerato se reduce de cuatro años a dos, perteneciendo a la enseñanza postobligatoria, y siendo sus finalidades: proporcionar a los alumnos una madurez intelectual y humana, conocimientos y habilidades para desempeñar funciones sociales con responsabilidad y competencia, y darles una preparación que les permita acceder a la Formación Profesional de grado superior, y a estudios universitarios, así como a estudios superiores de las enseñanzas artísticas.

El Bachillerato se organiza en cuatro modalidades: Artes, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Humanidades, y Ciencias Sociales y Tecnología. Las materias comunes a dichas especialidades, es decir, para cualquier Bachillerato son: Educación Física, Filosofía, Historia, Lengua Castellana y Lengua extranjera: por lo tanto, las Matemáticas no son una asignatura que estudien todos los alumnos de 16-18 años. El resto de las asignaturas, se distribuyen entre materias de Modalidad, y materias optativas. Las Matemáticas son materia de modalidad en el Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Tecnología y Humanidades, y Ciencias Sociales, aunque con distinto carácter y distintos objetivos en cada una de ellas.

En la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud se concibe la Matemática como un modo de

“tratar, explicar, predecir, modelizar situaciones reales y dar consistencia y rigor a los conocimientos científicos”.

y las capacidades que se han de desarrollar en los alumnos son de:

“abstracción, razonamiento en todas sus vertientes, resolución de problemas de cualquier tipo matemático o no, investigación, y analizar y comprender la realidad”.

Se pretende que las matemáticas cumplan un triple papel: instrumental, formativo y de fundamentación teórica:

“En su papel instrumental, proporcionan técnicas y estrategias básicas, tanto para otras materias de estudio, cuanto para la actividad profesional.

... En su papel formativo, las Matemáticas contribuyen a la mejora de estructuras mentales y a la adquisición de aptitudes cuya utilidad y alcancen trascienden el ámbito de las propias matemáticas. En particular, forman al alumno en la resolución de problemas genuinos, es decir, de aquellos en que la dificultad está en encuadrarlos y en establecer una estrategia de resolución adecuada, generando en él actitudes, y hábitos de investigación, proporcionándoles técnicas útiles para enfrentarse a situaciones nuevas. Pero el aprendizaje de las matemáticas no debe limitarse a un adiestramiento en la resolución de problemas, por importante que éste sea, debiendo completarse con la formación en aspectos como la búsqueda de la belleza y la armonía, una visión amplia y científica de la realidad, el desarrollo de la creatividad y de otras capacidades personales y sociales.

El conocimiento matemático, en el Bachillerato debe tener un cierto respaldo teórico. Las definiciones, demostraciones y encadenamientos conceptuales y lógicos, en tanto que dan validez a las intuiciones y confieren solidez y sentido a las técnicas aplicadas, deben ser introducidos en estas asignaturas”

Se le concede gran importancia a la enseñanza heurística, a la resolución de problemas, a la aplicación de las matemáticas a distintos ámbitos de la vida, al apoyo a la intuición, y a generar la necesidad de una formulación teórica que respalde dichas intuiciones.

Dentro de los libros de este periodo hemos considerado los siguientes:

- Surgen en este periodo una gran cantidad de nuevas editoriales que publican libros de educación secundaria, pero que siguen una enseñanza de tipo tradicional, con un enfoque formalista e instrumental, y en los que no se refleja la nueva ley. Estos libros intentan presentar en dos años los contenidos que antes se distribuían a lo largo de cuatro. Esto da lugar a libros voluminosos, donde los conceptos están condensados en pocas palabras.

Autor: Angel Primo Martínez, Carlos Pérez Manrique, Gloria Serrano Sotelo, Leopoldo Suárez Lago, Luis Grajal Alonso, Ramón Ardanuy Albajar.

Título: Matemáticas (Modalidad: Tecnología, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud).

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1998, Hespérides, Salamanca.

En este libro se incide más en el aprendizaje de tipo deductivo, y en los aspectos simbólicos y formales asociados a los conceptos. Así en el prólogo del libro se dice: “será necesario desarrollar capacidades tan importantes como la de abstracción, la del razonamiento en todos sus matices, la de resolución de problemas de cualquier tipo, y la de

analizar y comprender la realidad”. Con estas indicaciones, se configura un texto que pone énfasis en las definiciones y en las demostraciones.

- Otras editoriales que solamente publicaban en Primaria o que se dedicaban a la enseñanza universitaria, van a empezar a introducirse en el mercado editorial de la educación Secundaria. Son libros en los que se sigue la línea marcada en los primeros años de enseñanza.

Autor: A. Biosca Selga, M.J. Espinet Asensio, M. J. Fandos Tello, M. Jimeno Jiménez.

Título: Matemáticas II.

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1999, Edebé, Barcelona.

En este libro se utilizan numerosos recursos para presentar los conceptos: fotografías, esquemas, ejemplos, colores, notas históricas. Sin embargo, se hace poco énfasis en la resolución de problemas, la mayoría están relacionados con fenómenos típicamente matemáticos, y apenas se presentan situaciones en las que se apliquen los conceptos a la vida diaria o a otras ciencias.

- El último bloque, está constituido por libros que se acercan a la línea marcada por la L.O.G.S.E., basándose en la ley recién promulgada, y considerando que “las Matemáticas constituyen un conjunto muy amplio de conocimientos, que tienen en común un determinado modo de representar la realidad”, y “participar en el conocimiento matemático, consiste más que en la posesión de los resultados finales de esta ciencia, en el dominio de la “forma de hacer” matemáticas”.

Autor: R. Vizmanos, M. Anzola.

Título: Matemáticas 2 (ciencias de la naturaleza y de la salud-tecnología).

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1998, SM, Madrid.

Las características principales de estos libros son, la utilización profusa de gráficas y dibujos geométricos que sirven de apoyo intuitivo a la comprensión de los conceptos, las referencias al contexto histórico y cultural en el que se han desarrollado dichos conceptos, igualmente aparecen fotos y pequeñas biografías de los matemáticos que han contribuido a estos descubrimientos, lo que contribuye a la contextualización de los contenidos, y la gran cantidad de ejercicios y problemas de tipos diversos, aplicados tanto a las matemáticas como a otras ciencias y a la vida real. Se hace alguna referencia al uso de las nuevas tecnologías, poniendo ejemplos e indicando la forma de utilización de otros medios, como calculadoras gráficas.

4.4.2.- Descripciones.

Todos los libros de este periodo contienen numerosas descripciones de fenómenos no matemáticos relacionadas con puntos críticos, como consecuencia tanto de las orientaciones de la L.O.G.S.E., como de la influencia que han ejercido los últimos libros publicados en el periodo anterior, así como de las últimas tendencias surgidas de la

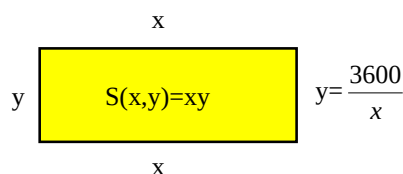
investigación en Didáctica de la Matemática. De entre las investigaciones que más han repercutido en el diseño de libros de texto, están las relacionadas con la resolución de problemas, y la incorporación de las nuevas tecnologías, que han influido fundamentalmente en el libro de SM, y en menor medida en el de Edebé, siendo el de Hespérides de corte más tradicional.

4.4.2.1.- Situaciones cotidianas.

Entre los problemas relacionados con situaciones cotidianas, hemos encontrado algunos que se han repetido a lo largo de todos los periodos considerados anteriormente, y otros que son exclusivos de este periodo. Entre los primeros, algunos siguen una formulación clásica, mientras que otros utilizan un enunciado más novedoso, tanto en relación con la motivación, como en su comprensión, o en las indicaciones que se le dan al alumno para su resolución.

Al igual que en el periodo anterior, hemos clasificado los problemas según la forma geométrica a que hacen referencia, así hemos considerado los casos correspondientes a: un rectángulo, una figura circular y un cilindro. Entre los primeros tenemos:

d1: Un pastor quiere vallar un campo rectangular de 3600 m² de superficie para hacer un aprisco. ¿Cómo le indicaríamos las dimensiones para que el coste fuera mínimo?



(SM, p. 323)

Este problema es uno de los clásicos, aunque lo hemos encontrado formulado de forma diferente en los distintos periodos analizados. Así en algunos está relacionado con el cálculo del marco de una ventana de área prefijada y en otros el contexto hace referencia a un solar o aprisco. Se incluye una gráfica que ilustra el problema, y puede ser de ayuda para resolverlo, de hecho, en dicha gráfica no sólo se presenta la representación geométrica del problema, sino que se incluye la asignación de las variables a cada una de las magnitudes, se establecen las relaciones entre las mismas a partir de los datos del problema, $y=3600/x$, y se proporciona la función de dos variables que se trata de minimizar, con lo cual este problema resulta ser un simple ejercicio de sustitución y de aplicación de los contenidos estudiados.

Otros enunciados similares son:

d2: Se dispone de 100m de valla metálica para construir un cercado rectangular aprovechando una pared existente. Calcula las dimensiones de la cerca para que el área sea máxima. (Hespérides, 324).

d3: Queremos vallar un campo rectangular que está al lado de un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 euros/m y la de los otros tres lados 0,625 euros/m. Halla el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1800 euros. (Edebé, p. 297).

d4: Con un alambre de 1 m queremos construir el borde de un rectángulo de área máxima ¿Qué dimensiones hay que dar al rectángulo?. (SM, p. 325).

Los problemas anteriores, que aparece en los tres libros analizados, también son clásicos, y podemos considerarlos como los duales del problema anterior ya que interviene la misma figura geométrica: el rectángulo, las mismas magnitudes: superficie y perímetro, siendo en este caso, en cambio, el perímetro fijo y la superficie variable de tal forma que hay que encontrar el máximo. Las variantes que proponen estos problemas son: hay que cercar los cuatro lados (SM y Edebé), considerar que sólo hay que cercar tres lados del rectángulo (en el caso de Hespérides por aprovechar una valla) y considerar que los lados están ponderados por el precio que cuesta la valla y según la posición en la que se coloque. Esto da lugar a que la función que hay que estudiar es diferente en cada uno de los tres casos, y que, aunque en todos ellos es lineal en ambas variables, los coeficientes de las variables en un caso son iguales ($S=2x+2y$ en SM) y en los otros dos son diferentes ($S=2x+y$ en Hespérides y $S=5'625x+0'625y$ en Edebé). Hay que destacar en el libro de Edebé, la utilización del euro como moneda, a pesar de no ser todavía moneda en curso. Este ha sido de los pocos libros que hemos encontrado en el que se ha utilizado esta nueva moneda en la formulación de problemas, para que el alumno pueda ir acostumbrándose a asociar diferentes artículos con ciertas magnitudes que dependen del valor de esta moneda.

Otros problemas, en los que la figura principal es un rectángulo y que ya hemos comentado en los periodos anteriores son:

d5: Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo. (SM, p. 325, Hespérides, p. 324).

d6: Con una lámina cuadrada de medio metro de lado queremos construir una caja de capacidad máxima ¿Qué dimensiones debe tener la caja? (Hespérides, p. 324).

En cambio otros son nuevos:

d7: Se considera una ventana rectangular rematada en la parte superior por un triángulo equilátero. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6,6 m hallar sus dimensiones para que su superficie sea máxima. (SM, p. 325).

d8: Una ventana “normanda” consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de 10 m. (SM, p. 325).

Los dos problemas anteriores resultan ser variantes del problema inicial de la cerca del aprisco, siendo la variación referente al tipo de figura geométrica, que en ambos casos consiste en una figura mixta formada a partir de un rectángulo y otra figura, en el primer caso, un triángulo equilátero y en el segundo un semicírculo.

Otro de los problemas novedoso que se basan en una figura rectangular es el siguiente:

d9: Un espejo plano de dimensiones 110 y 80 cm se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que quedan, el menor tiene la forma de un triángulo rectángulo de

catetos 10 y 8 cm. correspondientes respectivamente a las dimensiones mayor y menor del espejo. ¿Qué dimensiones tiene el espejo rectangular de área máxima que se puede construir con el trozo mayor? (Hespérides, p. 324).

Esta situación es exclusiva del libro de Hespérides. En ella se hace referencia como es habitual en los problemas de este grupo a diversas figuras geométricas, siendo la principal el rectángulo aunque, de manera secundaria, se utiliza un triángulo rectángulo. A pesar de ser un contexto habitual se incluyen elementos de uso casi exclusivo en contextos matemáticos: “se rompe en una esquina según una línea recta”, “el menor tiene forma de triángulo rectángulo”, “de catetos”, lo que confiere al problema de un carácter de artificialidad. Como en los casos que se han estudiado anteriormente, la solución indica que el punto ideal para considerar como esquina del nuevo espejo está a mitad de camino respecto de cada uno de los catetos del trozo cortado.

En cuanto a los problemas relacionados con figuras circulares, tenemos:

d10: Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular. Si dispone de 20 m de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la mayor superficie posible?. (SM, p. 326).

Es la primera vez que se incluyen problemas relacionados con sectores circulares en un contexto cotidiano, en este caso la forma de un parterre, siendo la fórmula que establece el área del sector circular no muy utilizada, relaciona el radio del sector y el arco que forma parte de él, y es similar a la del triángulo.

d11: En un jardín existe un paseo cerrado que consta de media circunferencia de radio 10 m y de su diámetro correspondiente. En el interior de la figura anterior se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. El parterre se plantará de camelias, que ocupan $0,25 \text{ m}^2$ cada una ¿Cuál es el número máximo de plantas que pueden ubicarse? (Nótese que el número depende del área del parterre). (SM, p. 326).

Otro contexto relacionado con un jardín también de forma circular, permite enunciar un problema en el que se relacionan magnitudes continuas: área; con magnitudes discretas: número de camelias; y figuras curvas, media circunferencia; con figuras planas rectas: rectángulo. La magnitud fija es el área del semicírculo y hay que maximizar el área del rectángulo para poder colocar el mayor número de camelias.

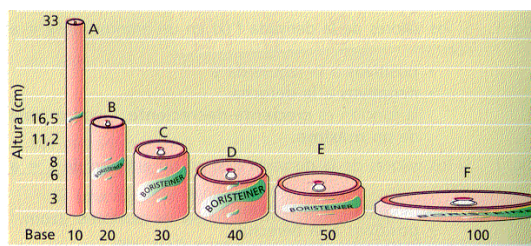
Este es el caso del siguiente problema del que hemos incluido las versiones que proponen cada uno de los libros, para que sirvan de modelo comparativo en cuanto al enunciado que se ha utilizado en cada caso:

d12: Se quiere construir un depósito cilíndrico cerrado de 6m^3 de capacidad ¿Qué dimensiones debe tener para que el coste de facturación relativo al material empleado sea mínimo?. (Hespérides, p. 320).

d13: Calcula las dimensiones de un bidón cilíndrico con una capacidad de 150 l si debe emplearse la mínima chapa posible para su fabricación. (Edebé, p. 287).

d14: Los botes ordinarios de cerveza, refrescos, colas, etc., tienen una capacidad de $\frac{1}{3}$ de

litro. Como sabes, su forma es la de un cilindro. El problema que nos planteamos ahora es estudiar las dimensiones óptimas para que el coste del material empleado en su construcción sea mínimo. Es evidente que el precio del material depende de la superficie total del bote.



¿Podríamos indicar a los fabricantes las dimensiones óptimas para que el coste sea mínimo?. (SM, p. 322)

d15: Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma rectangular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro.

Hallar las dimensiones de este envase (longitud del lado de la base y la altura) para que su precio sea el menor posible (SM, p. 326).

d16: Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm^2 y volumen máximo. Determinar su generatriz y su radio. (SM, p. 326).

En los tres primeros problemas se plantea la situación a partir de un cilindro de volumen dado, en el que se trata de minimizar la superficie, en el caso del libro de Edebé, y el coste de fabricación, en los otros dos libros. Mientras que los dos primeros enunciados los podemos clasificar como clásicos, el tercero resulta bastante novedoso, aunque vimos un enunciado bastante similar, incluso con un gráfico muy parecido, en el libro del Grupo Cero de la etapa anterior (p. 349). También son muy diferentes las medidas utilizadas en estos dos grupos, en el primero se trata de cilindros con gran capacidad, de ahí la denominación de depósito y bidón, mientras que en el segundo caso se trata de una lata de refresco, que es algo a lo que el alumno tiene fácil acceso, incluso el tipo de números resulta ser una diferencia, así mientras en los dos primeros casos se utilizan números naturales, en el tercero se utiliza un número racional asociado a cierto tipo estandarizado de recipiente. Se pretende, en este último caso, no sólo plantear un problema relacionado con los puntos extremos que se están estudiando, sino explicar cuál es el origen y la razón de este problema, y se presentan, en forma de gráfico cartesiano, diferentes posibilidades de la forma de la lata, que se pueden considerar para un volumen fijo. En relación con este problema, el artículo de Roe (1991), incluye posibles ampliaciones, utilizando una formulación similar. El cuarto y el quinto problemas son la traducción de los anteriores cuando la forma del recipiente es un prisma y en cuanto al último, aunque el contexto al que se refiere el problema hace referencia a un objeto de uso habitual: lata de conservas, el resto de los elementos hacen pensar en un problema de tipo geométrico: cilindro circular recto, generatriz, radio, área total.

También hay problemas que estudian los paralelepípedos rectangulares con dos caras cuadradas:

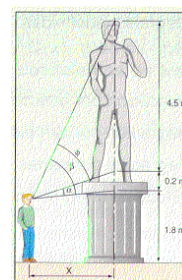
d17: En una oficina de correos solo se admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de ancho, alto y largo debe ser de 72 cm. Hallar las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo. (SM, p. 325).

Finalmente, además de los problemas que se refieren a figuras geométricas, en este periodo se incluyen otros en los que hay que utilizar las razones trigonométricas de los ángulos. Así tenemos los siguientes:

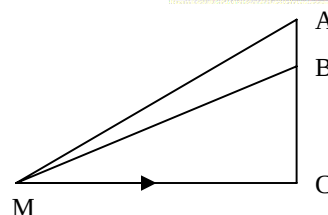
d18: Una escultura de 2 m de altura descansa sobre un pedestal de 4'80 metros ¿A qué distancia del eje de la estatua se ha de situar un hombre de 1'80 m de altura para que vea la estatua bajo el mayor ángulo posible?. (Hespérides, p. 321).

d19: En los jardines de un museo está expuesta una estatua de 4,5 m de altura sobre un pedestal a 2 m del suelo.

¿A qué distancia debe colocarse un crítico de arte de 1,8 m de estatura para ver dicha estatua bajo el mayor ángulo posible? (Edebé, p. 297).



d20: Sobre un terreno de fútbol sean A y B los postes de la portería situados a una distancia de 7 m. El jugador M avanza a perpendicularmente a la línea del gol. Si $\overline{AC} = 26$ m ¿A qué distancia de la línea de gol debe estar situado el jugador para que el ángulo de tiro a gol sea máximo?. (Hespérides, p. 324).



Estamos ante situaciones distintas de las habituales, ya que aunque el contexto al que se refieren se puede considerar cotidiano, no se hace referencia a ninguna figura geométrica plana ni espacial, como en los problemas que hemos incluido hasta ahora en este apartado. Si se maneja otro tipo de objeto de carácter geométrico como es el ángulo, lo que obliga a utilizar nociones trigonométricas que los alumnos normalmente han estudiado de una manera formal sin relación con situaciones reales, y que va a producir un cierto temor y rechazo hacia este tipo de problemas. Aunque inicialmente el planteamiento del problema sugiere la utilización de funciones de tipo trascendente como la tangente trigonométrica de un ángulo, posteriormente se transforma en una función algebraica racional. Los dos problemas primeros son bastante semejantes, salvo las magnitudes de los objetos que se describen en ellos, así mientras en el de Hespérides el pedestal tiene una altura de 4'80 metros lo cual parece excesivo, en el de Edebé tiene un tamaño de 2 m; y mientras la escultura en el libro de Hespérides es de 2 m lo que resulta desproporcionado en relación al pedestal utilizado, en Edebé la escultura es de 4'5 m que resulta más imponente que el pedestal. En ambos casos, el sujeto que observa la estatua posee la misma altura 1'80 m, que es superior a la media de la población española. En el primer caso la distancia que da el ángulo máximo es de 3'873 metros y en el segundo obtenemos una distancia más razonable de 0'447 m. En el tercero de los problemas, aunque el planteamiento es exactamente el mismo, el contexto es totalmente diferente: un campo de fútbol. Se incluye

un esquema de la situación que proporciona información sobre cada una de las magnitudes incluidas en el problema. La representación describe una situación horizontal respecto del suelo y del movimiento tanto, del futbolista como del balón. La misma representación utilizada en el caso de la escultura que representa una posición vertical.

4.4.2.2.-Fenómenos físicos.

Aunque los problemas de naturaleza física no se incluyeron en el periodo anterior, se recuperan algunos en este periodo. Un ejemplo es el siguiente:

d21: De un tronco de árbol cilíndrico de 40 cm de radio se quiere cortar un poste de sección rectangular. Determina las dimensiones que debe tener la sección para que el poste presente una resistencia máxima a la flexión, sabiendo que la resistencia a la flexión es proporcional al producto de la anchura de la sección por el cuadrado de la altura. (Hespérides, p. 322).

La situación geométrica subyacente se refiere a inscribir un rectángulo en un círculo, aunque en este caso no se trata de que el área del rectángulo sea máxima sino que la fórmula viene dada en el mismo enunciado del problema: “la resistencia a la flexión es proporcional al producto de la anchura de la sección por el cuadrado de la altura”, es decir, $R=kxy^2$ por lo que la función que hay que maximizar va a ser una función algebraica, en particular una cúbica. Este problema lo hemos encontrado en el primer periodo y no lo hemos vuelto a ver hasta éste.

4.4.2.3.- Contextos económicos.

Los problemas relacionados con contextos económicos que aparecieron en los libros de la etapa anterior, se repiten en ésta introduciendo, múltiples variaciones y contextos distintos. Se puede decir que es el boom de este tipo de problemas, el desarrollo de la economía, el tipo de sociedad que se ha construido, la necesidad de optimización de recursos, son fuente de gran diversidad de problemas de este tipo. De hecho se ha encontrado en los libros analizados el mismo problema, lo que sugiere la importancia que se les concede actualmente.

d22: Los topacios son piedras preciosas cuyo valor en pesetas es proporcional al cuadrado de su masa. Un topacio de 20 g se cae y se rompe en dos. ¿Cuánto se podrá obtener al menos de la venta de los dos trozos? (Hespérides, p. 322).

d23: Una esmeralda pesa 16 g y sabemos que su valor es proporcional al cuadrado de su peso. Si partimos en dos trozos la esmeralda, halla el peso que debe tener cada uno de ellos para que su valor sea mínimo. (Edebé, p. 297).

d24: Una piedra preciosa pesa 12 g. Sabiendo que el valor de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su peso y que su valor es de 144.000 pta, calcular, cuando dicha piedra se divide en dos trozos, el valor de cada uno de ellos cuando la depreciación sea máxima. (SM, p. 326).

Todos ellos se refieren la división de una piedra preciosa, cuyo peso varía entre 12 g de la más pequeña a 20 g de la más grande, en dos trozos. Sorprende que se trate de

minimizar el valor de los dos trozos en los que se rompe la pieza, y sólo es el libro de Hespérides el que razona mediante el enunciado esta situación: “¿Cuánto se podrá obtener al meno de la venta de los dos trozos?”, es decir se trata de buscar la máxima depreciación para calcular las mayores de pérdidas posibles que se pudieran producir. En los dos primeros problemas, no se da el dato del factor de proporcionalidad con el que se calcula el valor de la piedra, sin embargo el libro de SM, al proporcionarnos el valor total de la pieza 144000 pts nos indica que dicho factor sea 1000. Esto condiciona la pregunta que establecen los problemas, así en los dos primeros sólo se hace referencia al peso de cada uno de los trozos, mientras que en el de SM se pide el valor (que es el mínimo) de cada uno de ellos.

Otros problemas con contextos económicos, incluyen la función que hay que utilizar, y, paradójicamente, los datos son de tipo discreto:

d25: Una empresa de ordenadores tiene unos ingresos y unos costes de producción que se ajustan a las siguientes funciones:
 $I(x)=60x-x^2$ (Función de ingresos)
 x =(número de unidades producidas)
 $C(x)=x^2-12x+120$ (función de costes)
 Se desea saber cuál es el beneficio máximo de la empresa y qué número de unidades es preciso producir para obtenerlo. (Hespérides, p. 319).

Es un ejemplo típico de situación relacionada con un contexto actual, impensable en los anteriores, donde los ordenadores no estaban al alcance de una gran parte de la población. La formulación de este problema es característica de los que hemos considerado de tipo económico, en los que se proporciona a los alumnos la función o funciones con las que tienen que trabajar, sin dar ninguna información del porqué de dichas funciones (de donde se obtienen, por qué tienen esa formulación,...), ni siquiera se le pide al alumno que analice tales funciones, sino que las usan de una forma totalmente mecánica. Fácilmente se podía haber planteado un ejercicio de ese mismo tipo, eludiendo totalmente el contexto. La función que se maneja, es de una sola variable, es decir, no hay que identificar las relaciones entre dos variables como en los problemas más clásicos, para transformar dicha función en otra de una sola variable.

Y, por último, tenemos la siguiente situación en la que los datos también son discretos, pero no se proporciona la expresión simbólica que hay que optimizar:

d26: Una agencia inmobiliaria tiene alquilados 200 apartamentos en una ciudad a 160 euros al mes cada uno. Por cada 5 euros de aumento en el alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro apartamento más económico. ¿Cuál es el alquiler que produce mayor beneficio? (Edebé, p. 297).

Como hemos visto en otros problemas de esta misma editorial, el euro está incorporado en todos aquellos contextos que se refieren a costes y precios, lo que resulta novedoso respecto a otras editoriales de la misma época que no lo han introducido. La variable que producirá el máximo beneficio, se refiere a la cantidad de apartamentos vacíos, con lo que con una sola variable se puede construir la función que se va a analizar.

4.4.2.4.- Recorridos mínimos.

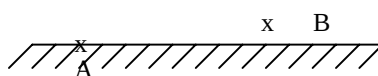
Vuelven a estar presentes los problemas relacionados con recorridos mínimos, introduciéndose algunas variantes. La siguiente versión, es la más básica, ya que las dos distancias que constituyen el recorrido poseen la misma entidad:

d27: Dos postes de 12 y 18 m de altura distan entre si 30 m. Se desea tender un cable uniendo un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de éstos. ¿En qué posición debe situarse el punto en el suelo para que la longitud total del cable sea mínima? (SM, p. 326).

Las magnitudes son todas lineales, porque son distancias entre dos puntos. A partir de los dos postes, y utilizándolos como catetos, se construyen sendos triángulos rectángulos donde la hipotenusa es la distancia entre el poste y el punto del suelo. Los postes tienen distinta altura, ya que sería evidente que en caso contrario el punto elegido debería ser el punto medio del segmento que los une.

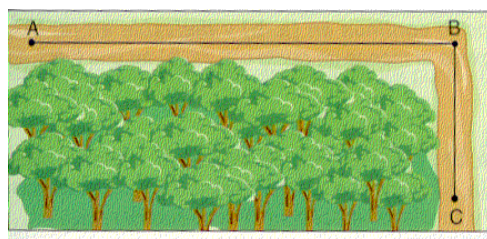
Otras versiones son las siguientes:

d28: Juan se encuentra en un punto A al borde de una piscina rectangular y percibe una señal de socorro de su amigo que se baña en B. Juan puede nadar a 1m/s y, sobre el borde, puede correr a 2 m/s ¿Cuál es el tiempo mínimo en el que puede socorrer a su amigo? (Hespérides, p. 323).



d29: Una persona se encuentra a 8 km de distancia de una carretera recta y su coche está en dicha carretera a 15 km de él en línea recta. Si esta persona puede caminar a 4 km/h fuera de la carretera y a 5 km/h por la carretera ¿A qué distancia del coche deberá abordar la carretera para tardar el menor tiempo posible?. (Hespérides, p. 324).

d30: Un caminante parte del punto A y se dirige al punto C. Si sigue el camino indicado (trazo continuo) su velocidad media es de 5 kmh⁻¹ y, si va campo a traviesa, su velocidad media es de 4 kmh⁻¹ ¿En qué punto deberá desviarse del camino para invertir el menor tiempo posible en el recorrido? Datos: AB=6 km; BC=3 km. (Edebé, p. 287).



En los tres problemas anteriores, las dos distancias consideradas, no tienen la misma entidad, ya que en una el protagonista va más despacio que en la otra. En el libro de Hespérides, se incluye un sencillo esquema de una de las situaciones planteadas, aunque no se indica en dicho esquema las variables que intervienen en el problema. En el de Edebé el gráfico es más detallado, pero tampoco se dan indicaciones que permitan traducir directamente del gráfico la expresión algebraica conveniente.

4.4.2.5.- *Descripciones de fenómenos matemáticos aritméticos.*

Dentro de los fenómenos matemáticos vamos a considerar inicialmente los de tipo aritmético, entre los que hay algunos analizados en libros anteriores, y otros totalmente nuevos. Entre los primeros tenemos:

d31: Halla dos números cuya suma sea 20 y cuyo producto sea máximo. (SM, p. 323, Edebé, p. 286 con el número 200).

d32: Calcular dos números reales cuya suma sea 5 y cuyo producto sea el mayor posible. Razona tu respuesta. (SM, p. 325).

Los dos problemas anteriores, constituyen la formulación básica que caracteriza los problemas aritméticos relacionados con máximos y mínimos. Aunque el planteamiento de ambos problemas es aritmético, el método de resolución es el mismo que el que se utiliza en los problemas geométricos en los que se fija el perímetro de una figura y se trata de hacer el área máxima. Los problemas que hay a continuación son diferentes variantes de la formulación básica.

d33: Escribe el número 4 como suma de dos enteros tales que la suma del cuadrado de uno y del cubo del otro sea máxima¹⁸. (Hespérides, p. 323).

d34: Determina dos números que sumen 48 y que el producto de uno de ellos por el cubo del otro resulte el mayor valor posible. (Edebé p. 287).

d35: Descomponer el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo. (SM, p. 323).

Las distintas formulaciones del problema conducen a diferentes funciones aunque todas son algebraicas.

Otra variante es:

d36: Halla un número positivo cuya suma con 25 veces su inverso sea mínima. (Hespérides, p. 324).

En este caso no se trata de descomponer un número a en dos sumandos x e y , sino que se parte solamente de un número x y de su inverso $1/x$, con lo que directamente se establece una expresión algebraica de una sola variable que es la que hay que estudiar.

Por último, dentro de los problemas aritméticos, incluimos el siguiente problema que sólo aparece en el libro de Hespérides, y que da fe del grado de abstracción con el que se manejan los conceptos en dicho libro.

¹⁸ Está mal formulado porque se obtiene un mínimo.

d37: Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son mediciones igualmente precisas de la magnitud x , su valor más probable será aquel para el que la suma de los cuadrados de los errores, $\sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$, tenga el valor mínimo ¿Cuál es el valor más probable?. (Hespérides, p. 319).

Pertenece a los contextos de tipo estrictamente matemático, ya que aunque inicialmente se indica que los datos son mediciones, no se expresa el tipo al que pertenecen, ni se indica cómo y para qué se han obtenido, y los datos son genéricos en el sentido de que se expresan mediante la letra x y se distinguen utilizando subíndices. Se aporta en los datos del problema la función que hay que minimizar, sin indicar porqué ni cómo se ha llegado a dicha función. El mismo enunciado puede conducir a un conflicto, ya que aunque se pide el valor mínimo de la función en cuestión, dicho valor mínimo se considera el “más probable”, y la combinación mínimo/más probable tiene una apariencia contradictoria. Una dificultad añadida a la resolución de este problema, no sólo está relacionada con que no haya datos concretos, es decir, que se trabaja con mediciones genéricas, sino que además, la suma que representa la función, viene indicada, no desarrollada, y el número de sumandos también es genérico.

4.4.2.6.- Fenómenos matemáticos de tipo geométrico.

En este bloque de libros, hemos tenido que distinguir aquéllos que se refieren solamente a objetos euclídeos, y aquéllos que incorporan el manejo de expresiones cartesianas relacionadas con dichos objetos geométricos. Entre los primeros hay que distinguir, como en los libros de épocas anteriores, los que se refieren a figuras planas y los que están relacionados con cuerpos geométricos tridimensionales. En los siguientes problemas, aunque intervienen figuras planas, en realidad sólo se manejan magnitudes lineales:

d38: Entre todos los rectángulos de perímetro 40 cm ¿cuál es el que tiene la diagonal menor? (Hespérides, p. 324).

d39: Aprovechando como hipotenusa una pared de $\sqrt{200}$ m, se desea acotar una superficie triangular de área máxima. ¿Qué medidas deberán tener los otros dos lados (catetos)?. (SM, p. 325).

d40: Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 cm y la altura relativa a este lado de 5 cm.
Encontrar un punto sobre esta altura tal que la suma de distancias a los tres vértices sea mínima. (SM, p. 326).

Los tres problemas siguiente relacionan el área y el perímetro de figuras planas, son generales, de tipo demostración, por lo que no hay datos, las magnitudes que formarán la función son cantidades genéricas y, por lo tanto, en el momento de derivar, hay que saber distinguir cuál es la variable independiente de la función, sin confundirla con el resto de las cantidades que intervienen en la formulación. Los resultados óptimos se aportan en el enunciado, esa es una de las características de los problemas tipos demostración.

d41: Indicar cuál es el triángulo de área máxima de entre todos los isósceles de perímetro 30 cm. (SM, p. 325).

d42: Demuestra que de todos los rectángulos de igual perímetro el de área máxima es el cuadrado. (Hespérides, p. 323).

d43: Demuestra que el triángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio dado es equilátero. (Hespérides, p. 324).

d44: Prueba que el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio dado es un cuadrado. (Hespérides, p. 323).

También se hace referencia a figuras circulares:

d45: De entre todos los sectores circulares de área 1 m^2 halla el de perímetro mínimo. (Hespérides, p. 324).

Los problemas siguientes se refieren a ciertas figuras planas que están inscritas en otras, y se trata de relacionar las dimensiones de ambas.

d46: Halla el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un triángulo isósceles de 8 cm de base y 25 cm de altura. (Hespérides, p. 323).

d47: Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una semicircunferencia de 40 cm de diámetro. (Hespérides, p. 323).

En otros problemas, a partir de un objeto unidimensional: un trozo de alambre, se construyen dos objetos bidimensionales: un triángulo y un cuadrado. A partir de una medida lineal se trata de obtener dos magnitudes cuadradas que son las áreas de las figuras obtenidas.

d48: Cortando un alambre de 50 cm en dos partes se quiere construir un triángulo equilátero y un cuadrado. Calcula las longitudes de las dos partes para que la suma de las áreas de esas figuras sea mínima. (Hespérides, p. 324).

d49: Sea un segmento de longitud a que se divide en dos partes, que van a servir de base a sendos rectángulos. En uno de los rectángulos la altura es el doble de la base y en el otro la altura es el triple de la base. Determinar el punto de división de modo que la suma de sus áreas sea mínima. (SM, p. 325).

Similar al problema del espejo analizado en la página 395, es el siguiente:

d50: Dado un rectángulo ABCD, sea M un punto variable del segmento $\overline{DC}$ ¿Cuáles son las posiciones de M que hacen mínimo el perímetro del triángulo AMB? ¿Y las que lo hacen máximo? (Hespérides, p. 324).

Entre los problemas que se refieren cuerpos geométricos, los hay que estudian prismas, conos o cilindros, los que se refieren a un cuerpo inscrito en otro o cuerpos formados por revolución de una figura plana. Entre los primeros tenemos:

d51: Hallar las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 500 m^3 de capacidad, que tenga un revestimiento de coste mínimo. (SM, p. 325).

d52: Construye un prisma recto de base cuadrada y volumen máximo, sabiendo que la suma de sus aristas es 120 m. (Hespérides, p. 324).

d53: Construye un cono de volumen máximo recortando de un disco metálico de 20 cm de diámetro un sector circular. (Hespérides, p. 324).

d54: ¿Cuál de los cilindros de volumen dado tiene menor superficie total?. (Hespérides, p. 323).

En los siguientes problemas se relacionan dos cuerpos geométricos, uno inscrito en otro:

d55: Hallar el radio de la base y la altura de un cilindro inscrito en una esfera de radio R sabiendo que el volumen del cilindro es máximo. (SM, p. 326, Edebé, p. 286 siendo el radio de la esfera de 9 cm).

d56: Inscribe en una esfera dada un cilindro de volumen máximo. (Hespérides, p. 323).

d57: Inscribamos en una esfera dada un cono de volumen máximo. (Hespérides, p. 322, Edebé, con el radio= 20 cm).

d58: Hallar el radio de la base y la altura de un cilindro inscrito en una esfera de radio R, sabiendo que el área lateral del cilindro es máxima. (SM, p. 326).

d59: Halla el cilindro de máximo volumen que se puede inscribir en un cono de 10 cm de radio y 20 cm de altura. (Hespérides, p. 323).

Se introducen, como novedad, algunos problemas en los que se consideran las figuras como cuerpos de revolución:

d60: Un triángulo isósceles de perímetro 10 m gira alrededor de la altura relativa al lado no igual y, como todo triángulo que se precie y tal haga, engendra un cono. Hallar sus lados para que el cono tenga volumen máximo. (SM, p. 326 Edebé, p. 297).

d61: Calcula el cono de volumen máximo que se puede obtener al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, sabiendo que la hipotenusa del triángulo rectángulo es de 30 cm. (Hespérides, p. 324).

d62: Hallar la base x y la altura y de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar una vuelta completa alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo. (SM, p. 326).

4.4.2.7.- Fenómenos matemáticos cartesianos.

En este periodo se continúa con los problemas relacionados con objetos geométricos, cuya su formulación tiene que ver con el plano cartesiano, que se inició a finales del periodo anterior. Curiosamente en todos los libros de esta etapa se incluyen este tipo de problemas. Se caracterizan porque los objetos geométricos a que se refieren son

puntos, rectas o cónicas determinadas por medio de una fórmula algebraica. Entre ellos encontramos aquellos que hacen referencia a diferentes distancias medidas a partir de un punto que hay que encontrar. El problema básico es el siguiente, para el que la función $s=|x-2|+(x^2+3^2)^{1/2}$ no es derivable en el punto mínimo:

d63: Calcula un punto del eje de abscisas tal que la suma de las distancias de dicho punto a los puntos (2,0) y (0,3) sea mínima. (Hespérides, p. 323).

Otros problemas se refieren a la distancia de un punto a una curva o de una recta a una curva:

d64: Halla los puntos de la parábola $y^2=4x$ tales que sea mínima la distancia al punto (3,0). (Hespérides, p. 324).

d65: Determinar la distancia mínima del origen a la curva $xy=1$. (SM, p. 326). (Hespérides, p. 323 $xy=4$).

d66: Calcula la distancia mínima del punto (0,1) a la hipérbola de ecuación $x^2-y^2=1$. (Hespérides, p. 320).

d67: Determina la distancia mínima entre la curva $f(x)=x^2$ y la recta de ecuación $y=x-2$. (Edebé, p. 287).

d68: En el plano cartesiano se consideran tres puntos fijos A_1 , A_2 y A_3 y una recta variable de dirección dada. Determina una recta de manera que la suma de los cuadrados de las distancias de estos tres puntos a ella sea mínima. Comprueba que la recta obtenida pasa por el punto $P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, siendo $A_i (x_i, y_i)$ las coordenadas de los puntos dados. (Hespérides, p. 324).

Otros problemas tratan de figuras geométricas formadas mediante objetos cartesianos, de tal manera que se trata de optimizar distintas magnitudes: área, perímetro, según los casos.

d69: Encontrar de entre todas las rectas que pasan por el punto A(1,2), aquella que forma con las partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Calcular también el área. (SM, p. 326) (Hespérides, p. 323, Edebé, p. 297 con $P=(3,6)$).

d70: Dentro del triángulo limitado por los ejes OX, OY y la recta $2x+y=8$ se inscribe un rectángulo de vértices (0,0), (a,0), (a,b) y (0,b). Determinar el punto (a,b) al que corresponde un rectángulo de área máxima. Hallar los puntos (a,b) para los que corresponde un rectángulo de área mínima. (SM, p 326).

d71: Dados dos puntos A y B, determina las posiciones del punto M que hacen máximo el perímetro del triángulo AMB rectángulo en M. (Hespérides, p. 322).

d72: De entre todos los rectángulos cuya base está contenida en el intervalo $[-2,2]$ y los dos vértices superiores en la curva $y=x^2-4$, halla el de área máxima. (Hespérides, p. 324).

d73: Comprueba que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia de ecuación $x^2+y^2=r^2$ es un cuadrado de lado $\sqrt{2}r$. (Edebé, p. 287).

Los dos problemas anteriores son similares, pero uno utiliza números concretos y en el otro se trata de un problema de demostración en el que se proporciona la solución.

d74: Los vértices de un triángulo son $A=(-1,1)$, $B=(3,-1)$ y C , que es un punto cualquiera de la función $f(x)=-1+\sqrt{-x^2+4x-3}$. Resuelve los apartados siguientes:
 Dibuja un gráfico que represente la situación del enunciado.
 Expresa el área del triángulo en función de la coordenada x del punto C .
 Determina en qué caso será máxima el área del triángulo. (Edebé, p. 297).

Al ser una función con radical, no está definida en todo el intervalo, sino sólo en los valores que hacen positivo el radicando, en este caso entre 1 y 3. El primer apartado está preparado para que los alumnos se den cuenta de este hecho, y a partir de aquí sean capaces de definir la función que les permitirá calcular el área que es máxima. Es un problema distinto, en el sentido de que se dirige al alumno en los pasos que tiene que dar para resolver el problema.

4.4.2.8.- Descripciones gráficas.

En el enunciado de otros problemas o ejercicios, se describe el comportamiento gráfico de una función. En ellos, se trata de deducir mediante la gráfica de la función derivada, la gráfica de la función primitiva correspondiente, observando de manera razonada las características que posee dicha gráfica. Este tipo de problemas sólo lo hemos encontrado en el libro de Edebé, resultando novedosas e interesantes las situaciones, ya que las investigaciones relativas a las formas de representación de las funciones, resaltan la importancia de la diversidad así como la transformación entre ellas. Se representan las gráficas en cuadrículas, para facilitar la localización de los puntos clave en la determinación de las características de la función.

En los dos problemas siguientes se parte de la gráfica de la función derivada, y se pide obtener una función primitiva. Se enumeran aquellas características que pueden ayudar en la determinación de dicha función: extremos, intervalos de monotonía, puntos de inflexión e intervalos de curvatura.

d75: Sea f una función de la que se conoce la gráfica de su función derivada f' , representada en la figura.
 Determina:
 Extremos relativos e intervalos de monotonía.
 Puntos de inflexión e intervalos de curvatura de f .
 La gráfica aproximada de f .
 (Edebé, p. 292).



d76: La figura muestra la gráfica de la función derivada f' de una función f . Determina a partir de la gráfica, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de f , y haz su representación aproximada.

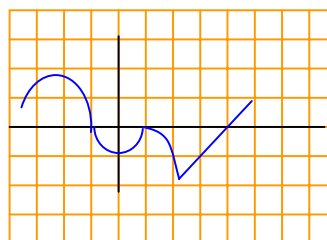


(Edebé, p. 292).

En el caso siguiente, se hace la transformación contraria, a partir de la gráfica de una función, hay que determinar la gráfica de la función derivada. Al ser éste el problema directo resulta más sencillo que los anteriores.

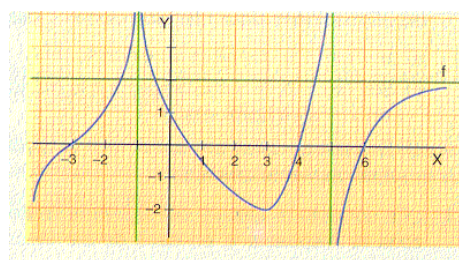
d77: Representa de forma aproximada la gráfica de la función f' , sabiendo que la gráfica de f es la de la figura.

(Edebé, p. 292)

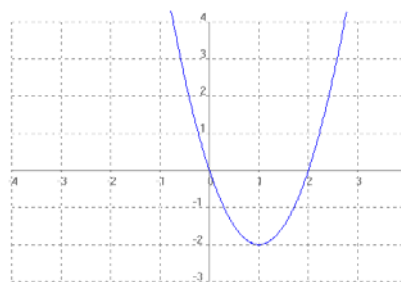


Los ejercicios siguientes plantean que mediante la observación de la gráfica de una función, se identifiquen ciertos objetos matemáticos, como aplicación de las definiciones que se han dado a lo largo de la lección. Resulta un tipo de ejercicio diferente del habitual, ya que generalmente se da la representación algebraica de la función, y a partir de ella se determinan dichos objetos matemáticos. En este caso, en cambio, se parte de la representación gráfica de una función, para determinar geoméricamente los puntos del plano que se piden.

d78: A partir de la gráfica de f , determina:
 Dominio de f , puntos de corte con los ejes y asíntotas.
 Intervalos de monotonía y extremos relativos, intervalos de curvatura y puntos de inflexión .
 (Edebé, p. 296).



d79: La figura muestra la gráfica de una función polinómica de segundo grado que pasa por el origen y que es la derivada de una función f . Resuelve los apartados siguientes:
 Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
 Determina los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de f .
 Traza un esbozo de la gráfica de f . Justifícalo.
 (Edebé, p. 296).



4.4.2.9.- Definiciones.

Las definiciones que hemos encontrado en los libros de texto de este periodo son las siguientes:

d80: Un punto $(c, f(c))$ de la gráfica de la función f es un **máximo local o relativo de f** si $f(c)$ es el mayor valor que toma f en las proximidades de c , es decir, en algún entorno I de c contenido en su dominio de definición.

Un punto $(c, f(c))$ de la gráfica de una función f es un **mínimo local o relativo de f** si $f(c)$ es el menor valor que toma f en un entorno de c contenido en su dominio de definición.

Un máximo local (respectivamente mínimo local) $(c, f(c))$ se dice que es **máximo absoluto** (respectivamente **mínimo absoluto**) si $f(c)$ es el mayor valor (respectivamente el menor valor) o valor máximo (respectivamente valor mínimo) de f en todo su dominio de definición. (Hespérides, p. 309).

En el libro de Hespérides se hace la distinción entre puntos extremos absolutos y relativos, volviendo de nuevo a la utilización de estos términos, de tipo más bien físico o filosófico que matemático. Se utiliza la expresión “dominio de definición”, que no se había incluido en ninguna otra definición, hasta el momento, aunque sí se había representado el conjunto donde está definida la función. Resulta extraño utilizar la letra c para nombrar el extremo en cuestión, y los entornos se consideran como intervalos. No se utiliza ningún tipo de símbolo lógico, ni perteneciente a la lógica de conjuntos, pero se asocian los términos máximo y mínimo, con expresiones como mayor y menor, que hace referencia a aspectos intuitivos relativos a las funciones y que dan una idea de éstas como variación. Se representan los puntos correspondientes a la función mediante coordenadas cartesianas, de forma que se expresa el punto extremo mediante un par, cuya primera coordenada indica una cantidad para la que la función tiene el valor mayor.

d81: Si una función f derivable tiene un **extremo relativo** en $x=a$ entonces $f'(a)=0$.
 (Edebé, p. 275).

En el libro de Edebé, en cambio, se asocia el extremo con el valor que tiene la derivada de la función en el punto. La definición exige que la función sea derivable, en caso contrario no se resuelve la cuestión de su definición, ni se dan pautas acerca de ella. Además se establece que el recíproco no es cierto, haciendo en este caso uso de la lógica: si

una función derivable tiene derivada nula en un punto, puede éste que no sea un máximo o un mínimo, y se pone el ejemplo de la función cúbica $f(x)=x^3$ en el origen de coordenadas.

d82: La función $f(x)$ tiene en el punto $P(a, f(a))$ un máximo (mínimo) si existe un entorno de a , $E(a,h)$, tal que para todo $x \neq a$ de dicho entorno se verifica $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$).

(SM, p. 320).

d83: Si una función tiene puntos extremos (máximos o mínimos), entonces su derivada se anula en ellos.

$P(a, f(a))$ puntos extremos $\Rightarrow f'(a) = 0$.

(SM, p. 320).

En el caso del libro de SM se recuperan ciertos símbolos relacionales que se utilizaron en la época anterior, como los símbolos de desigualdad ($>$, $<$ y $\neq$). La expresión relativa al entorno del punto, utiliza la letra E como inicial del sustantivo, y se indica tanto el punto al que se está refiriendo a como la longitud del intervalo, $2h$. Como en el caso del libro de Hespérides, el máximo es un punto del plano que tiene por lo tanto dos coordenadas. Se puede decir que mediante esta definición se recupera la forma de hacer de la matemática moderna, aunque dado el énfasis que se hace en relación con las curvas a lo largo de los libros de este periodo, se asocia el extremo con un punto del plano cartesiano. Como conclusión de la definición, se establece cómo determinar los puntos extremos para funciones derivables. En esta definición se utilizan incluso símbolos lógicos como $\Rightarrow$ para representar la implicación.

En cuanto a los puntos de inflexión, tenemos las siguientes definiciones:

d84: Un **punto de inflexión de f** es un punto de su gráfica en el que ésta pasa de ser cóncava a convexa, o viceversa. (Hespérides, p. 315).

La definición de punto de inflexión es una definición intuitiva relativa a la forma de la gráfica de la función, como se ha indicado en otros periodos, esta es la definición utilizada en los libros clásicos del siglo XVIII: el cambio de convexidad. Esto se corrobora, indicando que el punto de inflexión es un punto de la gráfica.

d85: Si una función f dos veces derivable tiene un **punto de inflexión** en $x=a$ entonces $f''(a)=0$. (Edebé, p. 279).

d86: Si $f''(a)=0$ y $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un **punto de inflexión** en $x=a$. (Edebé, p. 279).

En el libro de Edebé, al igual que se hizo con los máximos y mínimos, se establece la condición de punto de inflexión en relación con el comportamiento de la función segunda derivada, es decir, sólo se indica cómo establecer si un punto es o no de inflexión para las funciones derivables, en caso contrario no se establecen condiciones.

d87: Una función tiene un punto de inflexión en $P(a, f(a))$ si la función cambia de curvatura en dicho punto.

(SM, p. 318).

d88: Si una función $f(x)$ tiene puntos de inflexión, entonces su derivada segunda $f''(x)$ se anula en esos puntos.

$P(a, f(a))$ punto de inflexión $\Rightarrow f''(a)=0$

(SM; p. 318)

En el libro de SM, al igual que en el de Hespérides, se asocia el punto de inflexión con el cambio de curvatura de la gráfica correspondiente y se añade la definición más precisa relativa a las funciones que son dos veces derivables.

4.4.2.10.- Descripción de procesos y reglas.

Para facilitar el cálculo de máximos, mínimos y puntos de inflexión, se establecen unas descripciones de reglas, que permiten resolver fácilmente los ejercicios que se propondrán como aplicación de éstas.

d89: Criterio de la derivada segunda,

Sea f una función y c un punto de su dominio de definición tal que $f'(c)=0$ y $f''(c)\neq 0$. Se verifica:

- Si $f''(c)<0$, el punto $(c, f(c))$ es un máximo local de f .
- Si $f''(c)>0$, el punto $(c, f(c))$ es un mínimo local de f . (Hespérides, p. 311).

d90: Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, f tiene máximos y mínimos absolutos y éstos se determinan:

1º Calculando sus máximos y mínimos locales.

2º Comparando los valores de la función f en los máximos y mínimos locales con los valores de f en los extremos del intervalo $[a, b]$

El mayor de estos valores corresponde a los máximos absolutos de f y el menor de estos valores a los mínimos absolutos de f . (Hespérides, p. 314).

Se indican las condiciones que deben cumplir los distintos tipos de extremos de forma exclusiva, estableciendo los distintos casos que se pueden dar. Es totalmente diferente de los algoritmos que se establecían en el periodo 67-75, que eran pasos para calcular dichos puntos. En este caso se trata más bien de opciones o posibilidades. Se distinguen además, los casos de extremos relativos y absolutos, y cómo a partir de unos se pueden calcular los otros.

d91: Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0 \Rightarrow f$ tiene un **máximo relativo** en $x=a$.

Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0 \Rightarrow f$ tiene un **mínimo relativo** en $x=a$. (Edebé, p. 275).

El libro de Edebé resulta escueto en cuanto a la descripción de las reglas o criterios, utilizándose para ello un tipo de enunciado claramente lógico-matemático “SI *condiciones* ENTONCES *propiedad*”, enfatizándose mediante la utilización de símbolos exclusivos de la lógica. Igual que en el caso de Hespérides, se trata de una enumeración de las diferentes

posibilidades que se pueden dar a la hora de realizar los cálculos. Se resalta en negrita, tanto las condiciones, como la propiedad para que sirvan a modo de recuerdo.

d92: ¿Cómo se discrimina si un punto $P(a, f(a))$ es máximo o mínimo?

Criterio 1: Derivada primera

Si los valores de la derivada $f'(x)$ en un entorno de $x=a$ son:

- Positivos a la izquierda y
- Negativos a la derecha,

La función es **creciente-decreciente**, luego se trata de un **máximo**.

Si los valores de la derivada $f'(x)$ en un entorno de $x=a$ son

- Negativos a la izquierda y
- Positivos a la derecha,

La función es **decreciente-creciente**, luego se trata de un **mínimo**.

Criterio 2: Derivada segunda

Si $f''(a) < 0$ la función $f(x)$ es **cóncava** en un entorno de $P(a, f(a))$, luego se trata de un **máximo**.

Si $f''(a) > 0$ la función $f(x)$ es **convexa** en un entorno de $P(a, f(a))$, luego se trata de un **mínimo**.

Nota: Si $f''(0)=0$ ¹⁹, se debe utilizar el criterio anterior.
(SM, p. 321).

En el libro de SM se expresan las reglas de modo dirigido, a través de una pregunta que da pie a diferentes criterios. Al igual que se ha demostrado al analizar otros libros de SM en otros periodos, resulta el más exhaustivo en el establecimiento de estas reglas, indicándose como establecer la condición de máximo o mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada o solamente con la utilización de la primera derivada. De esta forma, se proporciona al alumno de diferentes criterios para utilizar según las distintas posibilidades, situaciones, condiciones o funciones que pudieran estar estudiando. El primero de ellos resulta ser un criterio comparativo respecto del valor de la función derivada en el punto, mientras que en el otro criterio se establece una condición que deben cumplir todos los valores de la función derivada segunda en un cierto entorno.

d93: ¿Cómo se discrimina si un punto $P(a, f(a))$ es de inflexión?

Criterio de la derivada segunda.

Si los valores de la derivada segunda $f''(x)$ en un entorno de $x=a$ son

- Positivos a la izquierda y
- Negativos a la derecha,

La función es **convexa-cóncava**, luego se trata de un **punto de inflexión convexo-cóncavo**.

Si los valores de la derivada $f''(x)$ en un entorno de $x=a$ son

- Negativos a la izquierda y
- Positivos a la derecha,

La función es **cóncava-convexa**, luego se trata de un **punto de inflexión cóncavo-convexo**.

(SM, p. 319).

¹⁹ Debe ser una errata del libro ya que debería decir $f''(a)=0$

Esa misma exposición se utiliza para establecer las reglas relativas a los puntos de inflexión.

d94: Criterio general para la determinación de máximos y mínimos locales y puntos de inflexión.

Si f es una función que admite derivada de todos los órdenes en un entorno del punto $c \in \text{Dom}(f)$ y es tal que:

$$f'(c)=f''(c)=\dots=f^{(n-1)}(c) \text{ y } f^{(n)}(c) \neq 0, \text{ se verifica:}$$

- Cuando n es par f presenta un máximo o un mínimo local en c :
Si $f''(c) < 0 \Rightarrow (c, f(c))$ es máximo local.
Si $f''(c) > 0 \Rightarrow (c, f(c))$ es mínimo local
- Cuando n es impar el punto $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. (Hespérides, p. 318).

Sólo en el libro de Hespérides se da el criterio general para determinar los distintos tipos de extremos, en ningún otro libro se ha establecido este criterio desde el primer periodo, ya que requiere un alto grado de abstracción para considerar los distintos órdenes de derivadas, y para distinguir que dicho orden sea par o impar. Se refiere a funciones infinitamente derivables, y permite distinguir los tres tipos de puntos críticos que se han considerado en los libros de texto analizados: máximos, mínimos y puntos de inflexión.

4.4.2.10.- Teoremas.

Los teoremas son, como en periodos anteriores, los que permiten establecer las reglas para el cálculo de los puntos críticos. Todos ellos aparecen en el libro de Hespérides.

d95: Teorema de Fermat

Si f tiene un máximo local o un mínimo local en el punto $(c, f(c))$ y f es derivable en c , se verifica: $f'(c)=0$. (Hespérides, p. 310).

d96: Si f es una función continua en $[a, b]$ el “Teorema de Weierstrass” permite afirmar que f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en $[a, b]$. (Hespérides, p. 313).

d97: Se puede demostrar por un procedimiento análogo al utilizado en la demostración del teorema de Fermat (sustituyendo f por f') que **si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de una función f derivable en un cierto intervalo I que contiene a c y tal que existe $f''(c)$, entonces $f''(c)=0$.** (Hespérides, p. 316).

En ellos se utilizan expresiones del tipo “si ... entonces” como se hizo en los libros del periodo anterior. De forma novedosa, junto a cada teorema, se asocia el nombre del matemático al que se le atribuye, pero no se da ninguna información acerca de la época en la que se establecieron, la información que poseía dicho matemático, los problemas que originaron dichos teoremas, y las dificultades que tuvieron que ir superando hasta alcanzar la formulación que conocemos hoy en día. Por ello podemos decir, que este libro es un claro ejemplo de la descontextualización y la deshistorización que sufren los conceptos al pasar a la enseñanza. Sólo se demuestra el primero de los teoremas, de los otros aparecen ejemplos gráficos, y en el último se plantea la posibilidad de que el recíproco a este teorema no sea cierto, mediante un contraejemplo que concretamente es la función $f(x)=x^4$.

Unidades de información	Hespérides				Edebé				SM			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
d1									T1	T6	T11	T16
d2	T1	T6	E11	C16								
d3					T1	T6	E11	C16				
d4, d10, d16, d24, d27									T1	T6	E11	T16
d5, d9, d12, d21, d22, d29	T1	T6	E11	T16								
d6												
d7, d8, d15									T1	C6	E11	T16
d11, d17									T1	C6	E11	C16
d13, d23					T1	T6	E11	T16				
d14									C1	C6	C11	C16
d18, d20	T1	C6	T11	T16								
d19					T1	C6	E11	T16				
d25, d28	T1	T6	T11	T16								
d26					T1	C6	E11	C16				
d30					T1	T6	T11	T16				
d31, d32, d35, d40, d41, d39, d51, d58, d62, d70									T1	E6	E11	E16
d33, d36, d38, d45, d46, d47, d48, d52, d53, d59, d61, d63, d64, d65, d66, d72	T1	E6	E11	E16								
d34, d67, d74					T1	E6	E11	E16				
d37, d42, d43, d44, d49, d50, d54, d58, d68, d71	E1	E6	E11	E16								
d55					E1	E6	E11	E16	E1	E6	E11	E16
d56									E1	E6	E11	E16
d57	E1	E6	E11	E16	T1	E6	E11	E16				
d60					T1	E6	E11	E16	T1	E6	E11	E16
d69	T1	E6	E11	E16	T1	E6	E11	E16	T1	E6	E11	E16
d73					E1	E6	E11	E16				
d75, d76, d77, d78, d79					T1	E6	C11	E16				
Carácter	T	E/T	E	E	T	E/T	E	E	T	E	E	E
d80	T2	E7	E12	E17								
d81					T2	T7	E12	T17				
d82, d83									T2	T7	E12	T17
d84	E2	C7	E12	E17								
d85, d86					T2	T7	E12	T17				
d87									T2	C7	E12	T17
d88									T2	T7	T12	T17
d89, d90, d94, d95, d96, d97	T2	T7	T12	T17								
d91					T2	T7	T12	T17				
d92, d93									T2	T7	T12	T17
Carácter	T	T	T	T	T	T	E	T	T	T	E/T	T

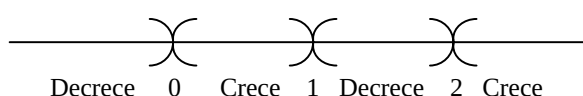
Tabla 4.4.1: Descripciones de los libros del periodo 95-01

4.4.3- Tablas.

4.4.3.1.- Tablas de descripción local.

Entre las tablas, tenemos las tablas de descripción local que utiliza Hespérides, en las que sólo se estudia el signo de la derivada primera que indica el crecimiento, decrecimiento y puntos críticos. En estas tablas aparecen además de símbolos numéricos, palabras de la lengua habitual relativas a las propiedades de las funciones como decrece, crece.

t1: Hemos obtenido para la función $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-2$ definida en $\mathbb{R}$ los siguientes intervalos de crecimiento y decrecimiento:



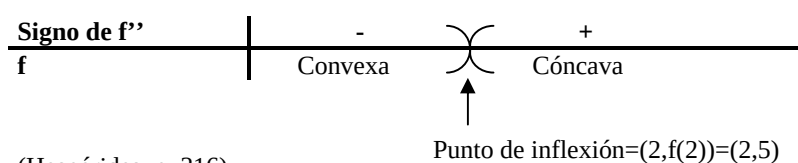
Lo que indica que en $x=0$ y $x=2$ la función presenta un mínimo local, y en $x=1$ un máximo local, esto es: $(0,-2)$ y $(2,-2)$ son los mínimos locales de f y $(1,-1)$ es el máximo local de f .

(Hespérides, p. 310).

La tabla anterior recoge las propiedades de la función de forma lineal, en clara referencia al eje de abscisas, de esta forma se representan diferentes intervalos de dicho eje, a los que se añade una cualidad referente al comportamiento de la función en dicho intervalo. Los puntos críticos que hemos visto que en otras tablas se asocian al 0, en este caso se asocian a su primera coordenada, sin indicar en ningún caso el valor de la función en dicho punto. Esta tabla se modifica posteriormente para establecer la curvatura de la función en los diferentes intervalos de su dominio de definición:

Otra de estas tablas es:

t2: Determinemos los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$.



(Hespérides, p. 316)

Además de incluir las características de la función, se utilizan signos asociados con dichas propiedades, que se corresponden con los signos de la derivada segunda. Aunque la gráfica es parecida a la anterior, ya que se refiere a los valores del eje de abscisas, en realidad está organizada en dos niveles, el superior que se expresa en lenguaje típicamente matemático utilizando signos operacionales, y el inferior en el que se utiliza el lenguaje habitual utilizando palabras corrientes.

4.4.3.2.- Cuadros variacionales.

En el libro de Edebé, hemos encontrado cuadros variacionales que se utilizan tanto para estudiar las diferentes propiedades de las funciones, como para representarlas gráficamente. Hay cuadros, que se refieren sólo al crecimiento/decrecimiento de la función incluyendo los máximos y mínimos, o a la curvatura con los puntos de inflexión, como los siguientes, y otros que combinan las dos cosas y que se utilizan para representar las funciones.

t3: Halla los intervalos de monotonía de $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$.

Intervalos	$(-\infty, 2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
Signo de f'	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
Monotonía de f							

(Edebé, p. 277)

t4: Halla los intervalos de curvatura de $f(x) = x^4 - 2x^3$.

Intervalos	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
Signo de f''	+	0	-	0	+
Curvatura de f					

(Edebé, p. 281).

En estos cuadros se representa la variación de funciones polinómicas y racionales de diferentes grados. El crecimiento se representa utilizando flechas hacia arriba, el decrecimiento con flechas hacia abajo, la convexidad con curvas abiertas hacia arriba, y la concavidad con curvas abiertas hacia abajo, los puntos de inflexión y los máximos y mínimos con ceros en la derivada correspondiente. Una tabla en la que se combinan la función su derivada primera y su derivada segunda es la siguiente.

T6: Representa gráficamente la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
f(x)	-	0	-	-2	-	-4	-	0	+
f'(x)	+	0	-			0	+		
		M				m			
f''(x)	-			0	+				
				PI					

(Edebé, p. 284)

En el libro de SM no hemos encontrado tablas ni siquiera para representar gráficamente las funciones.

En la siguiente tabla se resumen las características de las representaciones analizadas en este apartado.

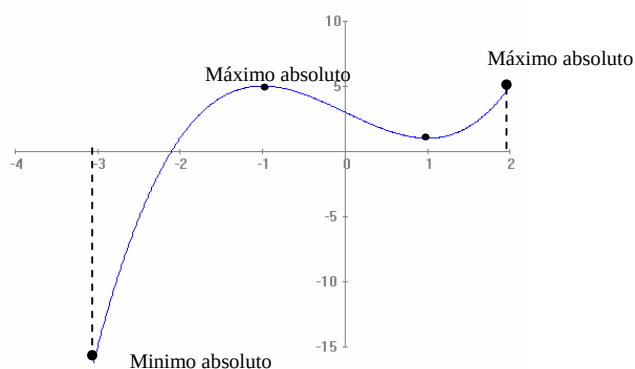
Unidades de información	Hespérides				Edebé				SM			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
t1	T3	C8	T13	T18								
t2	T3	C8	T13	T18								
t3					C3	T8	T13	C18				
t4					C3	T8	T13	C18				
t5					C3	T8	T13	T18				
-									E3	E8	E13	E18
Carácter	T	C	T	T	C	T	T	T/C	E	E	E	E

Tabla 4.4.2: Tablas de los libros del periodo 95-01

4.4.4.- Gráficas.

4.4.4.1.- Ábacos.

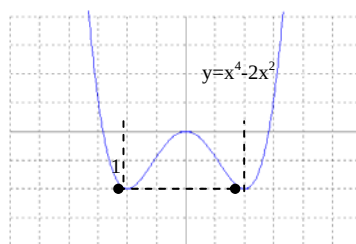
Entre las gráficas de tipo ábaco encontramos las que se utilizan para estudiar el comportamiento gráfico de funciones particulares, es decir, a partir de una función se estudian sus máximos y mínimos, tanto absolutos como relativos. Solamente se señalan los valores en los que se anula la derivada, representando sus coordenadas, y asociando dichos puntos con su abscisa y ordenada correspondientes mediante líneas punteadas, que enfatizan el carácter de ábaco de dicha gráfica.



g1: (Hespérides, p. 314)

La función anterior es la función cúbica $f(x) = x^3 - 3x + 3$ representada en el intervalo $[-3, 2]$, y en la que destacan los máximos y mínimos absolutos y un mínimo relativo.

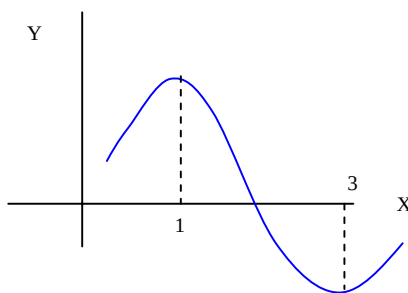
Otra gráfica de tipo ábaco es:



g2: (SM, p. 321)

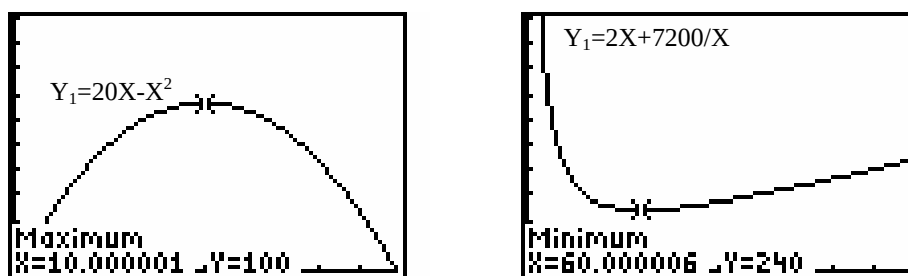
Esta gráfica utiliza una cuadrícula, resaltando de esta forma, tanto el tipo de gráfica (ábaco), como el carácter que se le quiere dar (escolar). Como particularidad, presenta dos puntos mínimos en distintas posiciones del plano que tienen el mismo valor funcional.

En la siguiente gráfica, aunque no se representa ninguna función en particular, sí se asignan números concretos a las abscisas de los puntos extremos, por lo que hemos incluido esta gráfica en el apartado correspondiente a los ábacos.



g3: (Edebé, p. 275)

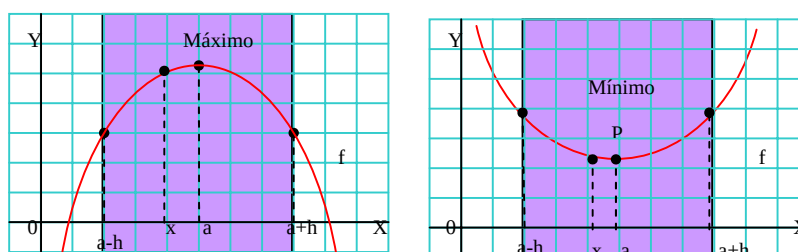
En el libro de SM se incluyen dos gráficas procedentes de la edición de dos funciones en la calculadora gráfica. Ambas gráficas, representan el cálculo de un máximo y un mínimo tal como resultaría en una calculadora gráfica. Se incluye en dicha representación, la expresión algebraica de la función, la gráfica, el punto extremo señalado con dos flechas enfrentadas, y las coordenadas del punto extremo correspondiente. Dichas gráficas las clasificamos, por lo tanto, como gráficas de tipo ábaco.



g4: (SM, p. 323)

4.4.4.2.- Mensajes topológicos.

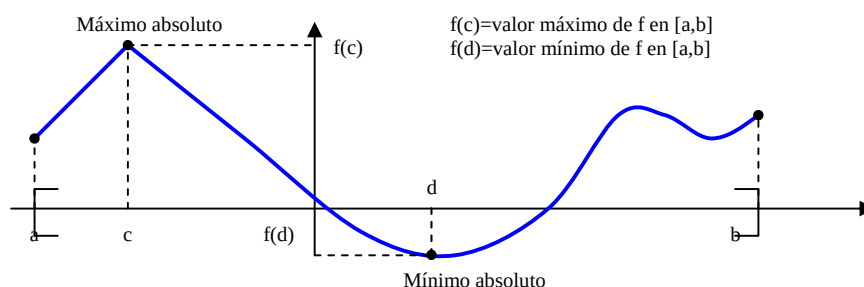
Algunas de las gráficas que hemos encontrado, son mensajes topológicos en los que se representa la curva en relación con un determinado intervalo, escogido para centrar la atención acerca de las propiedades que se cumplen en él.

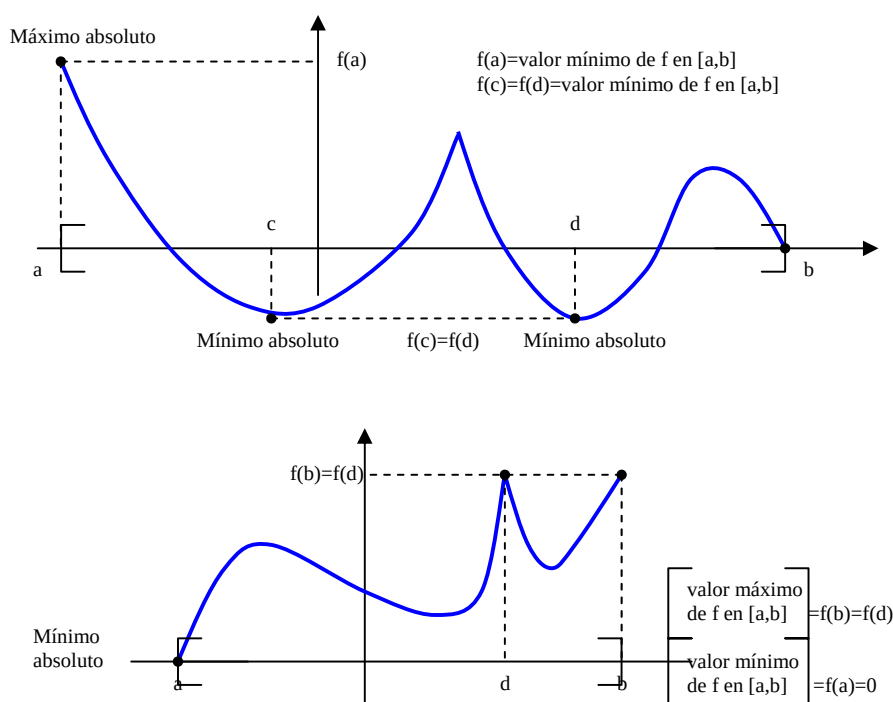


g5, g6: (SM, p. 320).

Estas gráficas centran la atención mediante la utilización del color, en un intervalo en torno al punto P que se está estudiando, para analizar los valores de la función en puntos próximos a P. Otro recurso utilizado en estas gráficas, es el de la cuadrícula, que marca la asociación entre los puntos de la curva con sus coordenadas correspondientes, lo cual sería un indicio de que la gráfica podría haber sido considerada de tipo ábaco, pero dicha cuadrícula queda en segundo plano ante la utilización del color que es más llamativa. El uso de la cuadrícula, hace mayor énfasis en el carácter escolar de estas gráficas, frente a otros libros de niveles superiores en los que no se usa este recurso.

También las siguientes gráficas se pueden considerar mensajes topológicos:

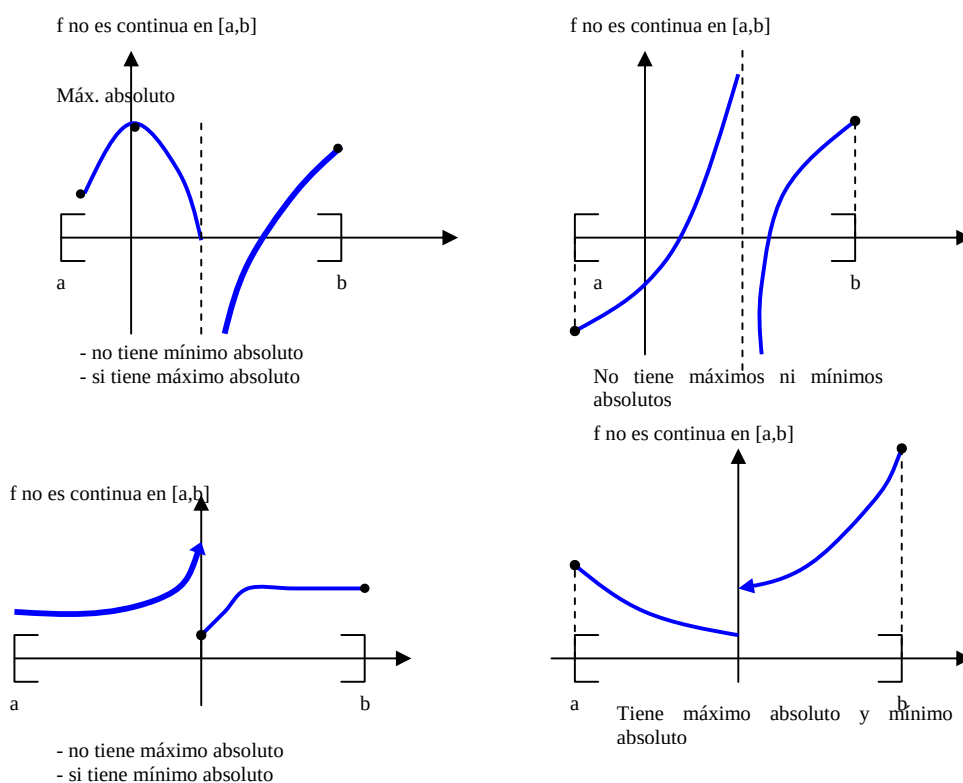




g7, g8, g9: (Hespérides, p. 313)

En las gráficas anteriores, se representan funciones continuas en un intervalo cerrado, que por el teorema de Weierstrass tienen un máximo y un mínimo absolutos. En ellas se indica el intervalo cerrado en el eje de abscisas mediante marcas propias de dichos objetos matemáticos. Además, se representan distintas posibilidades, incluyendo que haya varios máximos o mínimos y que, por lo tanto, tengan el mismo valor funcional aunque su posición en el plano cartesiano sea diferente. Mediante líneas punteadas horizontales que unen dichos puntos con el eje de ordenadas, se visualiza, en el caso de un máximo, que el resto de la curva queda por debajo, y en el caso del mínimo, que queda por encima.

En las siguientes gráficas se distinguen los diferentes casos de existencia de máximos y mínimos absolutos en relación con una función discontinua, en el interior de un intervalo cerrado, y en torno al punto de discontinuidad. Se indican mediante “puntos gordos” la localización de máximos y mínimos absolutos.

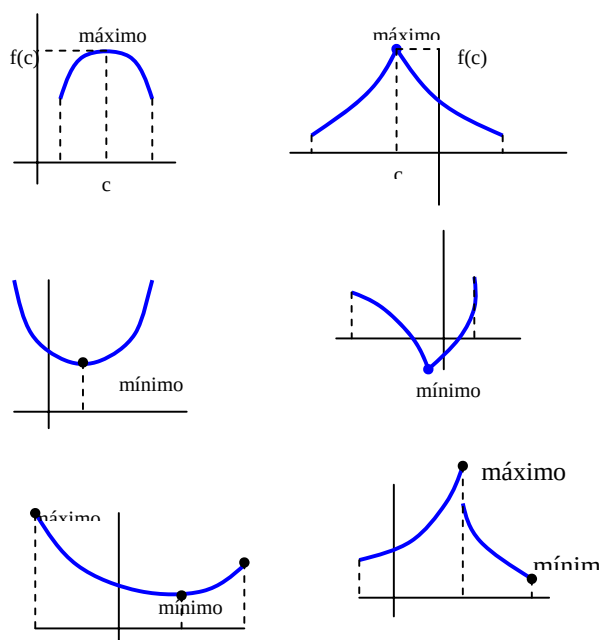


g10, g11, g12, g13: (Hespérides, p. 313)

Para resaltar que se trata de un estudio local, se focaliza la atención en un intervalo, marcándolo mediante los símbolos propios de éste, aunque eso se hace una correspondencia entre el intervalo del eje de abscisas y el correspondiente al eje de ordenadas.

4.4.4.3.- Ideogramas.

Entre las gráficas de tipo ideograma, tenemos aquellas que nos clasifican las diferentes posibilidades de un punto del plano para ser un punto extremo, tanto para funciones derivables, como para funciones no derivables en dicho punto, y tanto para funciones continuas, como para funciones discontinuas.

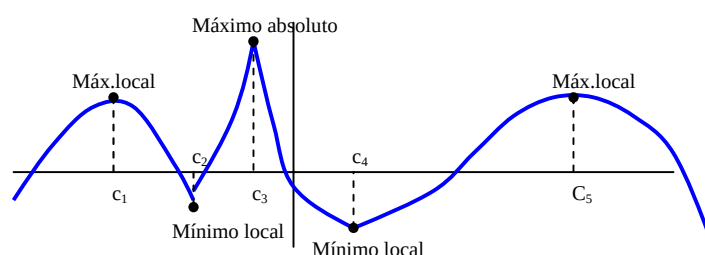


g14, g15, g16, g17, g18, g19: (Hespérides, p. 309)

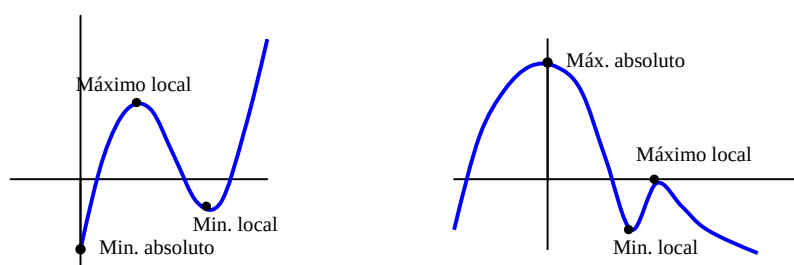
Los puntos extremos se señalan mediante “puntos gordos” del plano, de forma que se resalta que el extremo se refiere a un punto de la curva, y no a la ordenada que éste tiene. Para algunos de estos puntos se señala la abscisa mediante líneas punteadas que enlazan el punto extremo con el eje OX. Además se incluyen gráficas conjuntas de los dos tipos de extremos, para comparar de esta forma su posición en el plano cartesiano.

Otras gráficas se utilizan para comparar y distinguir los extremos absolutos de los relativos, y comprobar el carácter local que poseen estos últimos. En la primera de las gráficas, se trata de una función definida a trozos que, aunque es continua, no es derivable en todos sus puntos, esencialmente en los puntos extremos. Se marcan los puntos mediante “puntos gordos” y levantando líneas discontinuas hasta ellos, para hacerles corresponder su abscisa. Las otras dos gráficas, centran su contenido en la distinción entre máximo local y absoluto, en una de ellas, y mínimo local y absoluto en la otra. En estas dos últimas gráficas, además se incluye un extremo correspondiente al tipo que no se repite. En estos casos, sólo se señalan los puntos extremos, sin hacer referencia a ninguna de sus coordenadas.

Otras gráficas que representan distintos tipos de extremos son:



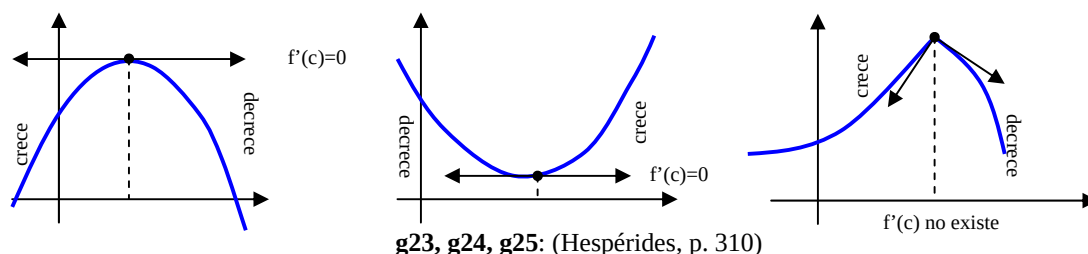
g20: (Hespérides, p. 309)



g21, g22: (Hespérides, p. 310)

Se incluye una gráfica en la que aparecen en diferentes posiciones los puntos críticos, con lo que se enfatiza el carácter relativo de los mismos, es decir, puede haber diferentes mínimos para los que el valor de la función en uno de ellos, sea menor que en el otro. El carácter de mínimo, sólo depende del comportamiento en relación con los puntos cercanos a él. Estos puntos se señalan mediante etiquetas indicando su carácter, y mediante líneas verticales punteadas se relacionan con sus abscisas correspondientes.

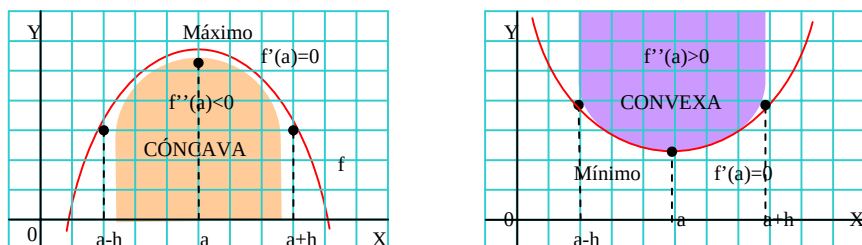
En otros ideogramas, se trata de representar la correspondencia entre el comportamiento a la derecha y a la izquierda del punto extremo, con una determinada propiedad de la curva (crecimiento versus decrecimiento).



g23, g24, g25: (Hespérides, p. 310)

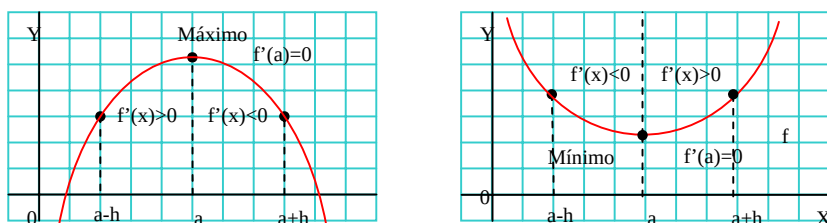
De esta forma, se da una imagen visual de la definición de los puntos extremos, que sirve de regla para recordar fácilmente. Las características se representan mediante etiquetas verbales, mientras que en el periodo anterior se utilizaron expresión de tipo

matemático-relacional. Estas situaciones representan tanto el caso de funciones continuas como de funciones discontinuas.



g26, g27: (SM, p. 321)

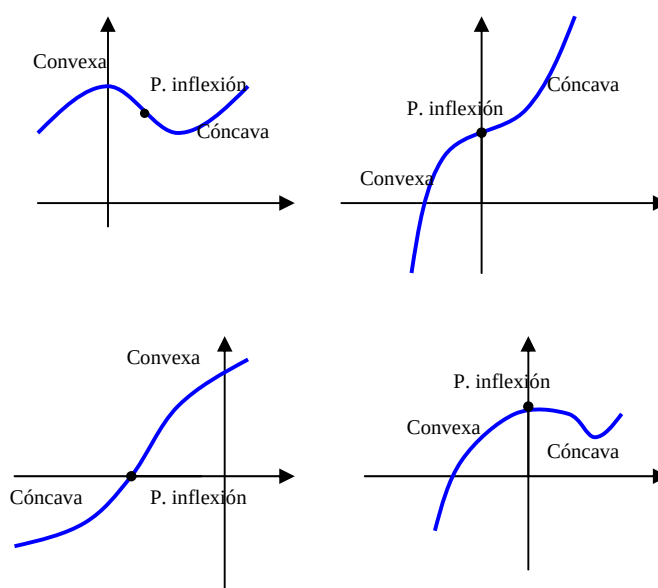
En los gráficos anteriores, la relación entre los puntos extremos y la curvatura de la función, se pone de manifiesto mediante la utilización del color. A pesar de usarse otros recursos como la cuadrícula que daría pie a pensar en esta gráfica como ábaco, o la señalización de los intervalos mediante líneas verticales punteadas, que la clasificarían como mensaje topológico, no hay una alusión clara, ni a las coordenadas de los puntos extremos, ni a la relación que pudiera existir entre un intervalo en el eje de abscisas y el correspondiente en el eje de ordenadas, lo que nos ha inducido a clasificarla como ideograma. La curvatura, no sólo se representa mediante la utilización del color, sino mediante etiquetas verbales para nombrarla, y símbolos matemáticos que queden asociados a ella de forma visual ($f''(x)<0$ o $f''(x)>0$).



g28, g29: (SM, p. 321)

En los ideogramas anteriores se asocian expresiones de tipo algebraico a zonas de la curva según el carácter creciente o decreciente que posean en dicha zona. Este tipo de gráficas ya se analizaron en el periodo anterior, su papel consiste en asociar las reglas de determinación de los máximos y los mínimos, con una imagen gráfica que se utilice como una pista para recordar dicha regla.

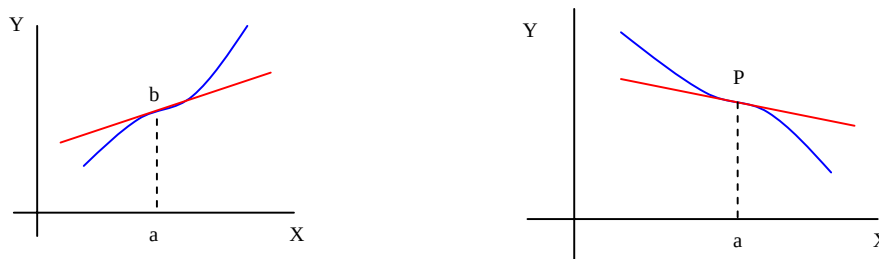
Igual que se ha planteado la cuestión para los máximos y mínimos, también se trata el caso para los puntos de inflexión, en estos casos, las propiedades de las funciones que van a ser determinantes a la hora de identificar dichos puntos, son la convexidad y la concavidad. Se distinguen todos los casos posibles.



g30, g31, g32, g33: (Hespérides, p. 315)

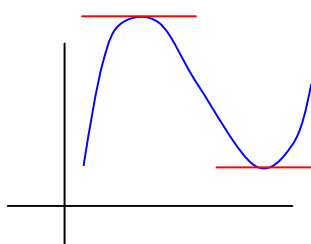
En estos ideogramas se representa a la izquierda y a la derecha del punto de inflexión, mediante etiquetas verbales, la propiedad correspondiente de la curva, de forma que, al igual que en el caso de los máximos y mínimos, sirva de imagen visual para recordar dichas propiedades, y asociarlas con los puntos en los casos pertinentes.

Y en el libro de Edebé:

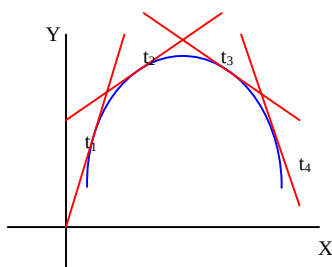


g34, g35: (Edebé, p.279)

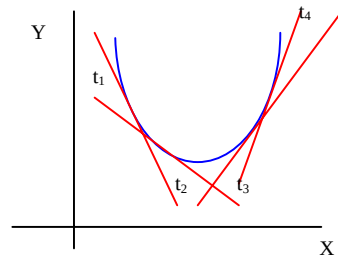
La definición de punto de inflexión relativa al cambio de concavidad en el punto, queda clara mediante los gráficos anteriores, en los que la tangente marca dicho cambio de concavidad, quedando la curva hacia un lado del punto por encima de la tangente y al otro por debajo. También se relacionan los puntos extremos con la pendiente de la recta tangente:



Si $x=a$ es un extremo relativo de f , la recta tangente a la gráfica de f en $x=a$ es horizontal, pues $f'(a)=0$



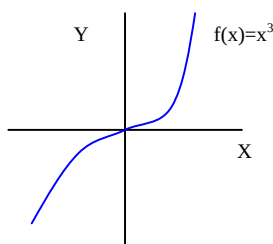
Si f tiene un mínimo en $x=a$, las pendientes de las rectas tangentes crecen en un entorno de a .



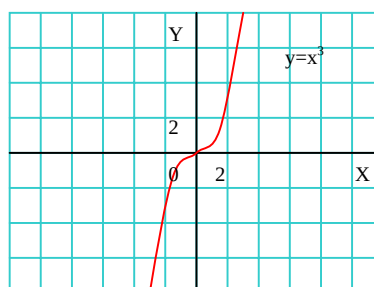
g36, g37, g38: (Edebé, p. 275)

Se puede observar que en un entorno del punto si éste es un máximo, la pendiente de las rectas decrece hasta hacerse cero, mientras que si es un mínimo, la pendiente de estas rectas va creciendo desde cero. Este mismo argumento es el que se utilizaba en el libro de l'Hôpital para determinar las reglas de cálculo de los máximos y mínimos. Se presenta, por tanto una interpretación de tipo **geométrico**, más que algebraica o de tipo gráfico, y dotándola de cierto carácter dinámico por la variación de la pendiente de la recta tangente.

Algunos ideogramas, se utilizan como contraejemplos:



g39: (Edebé, p. 275)



g40: (SM, p. 320)

Se trata de una función que tiene derivada nula en el origen de coordenadas, pero dicho punto no es un punto extremo sino un punto de inflexión.

Unidades de información	Hespérides				Edebé				SM			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
g1	T1	T9	C14	E19								
g2, g4									T4	T9	T14	C19
g3					T4	T9	C14	E19				
g5, g6									E4	E9	C14	C19
g7, g8, g9, g10, g11, g12, g13	E4	T9	E14	E19								
g14, g15, g16, g17, g18, g19, g20, g21, g22, g23, g24, g25, g30, g31, g32, g33	E4	C9	E14	E19								
g26, g27, g28, g29									E4	C9	C14	C19
g34, g34, g36, g37, g38					E4	C9	E14	E19				
g39					E4	C9	C14	E19				
g40									E4	C9	C14	C19
Carácter	E	T/C	E	E	E	C	E	E	E	C	C	C

Tabla 4.4.3: Gráficas de los libros del periodo 95-01

4.4.5.- Expresiones simbólicas.

Las expresiones simbólicas suelen venir ligadas a ejercicios de aplicación de las reglas para el cálculo de máximos y mínimos locales de funciones derivables. Algunas de dichas funciones, además, han de representarse gráficamente, incluyendo por lo tanto, el manejo de conceptos como: crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, asíntotas, cortes con los ejes, raíces,...

En el libro de Hespérides, encontramos una gran variedad de diferentes tipos de funciones, algunas con puntos extremos, otras sin ellos y otras en las que se repiten dichos puntos de forma periódica. En general, estas funciones forman parte de ejercicios de tipo mecánico y algebraico, más que interpretativo.

e1: Determina los máximos y mínimos locales de las funciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = |\sin x|; & \text{b) } f(x) = \cos |x|; & \text{c) } f(x) = \frac{xe^x}{1+x} \\ \text{d) } f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}; & \text{e) } f(x) = \frac{\ln x}{x}; & \text{f) } f(x) = x\sqrt{x+3} \end{array}$$

(Hespérides, p. 323).

e2: Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos y los puntos de inflexión de las funciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}; & \text{b) } f(x) = x^2 \ln x; & \text{c) } f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \\ \text{d) } f(x) = \ln \frac{x}{x^2+1}; & \text{e) } f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 & \text{f) } f(x) = \ln(x+1) - \ln x; \end{array}$$

g) $f(x)=xe^x$.
(Hespérides, p. 323).

e3: Calcula los máximos y mínimos locales de la función $f(x)=\text{sen}x-\text{cos}x$. ¿Cuál es el valor máximo y el valor mínimo que toma esta función? (Hespérides, p.323).

e4: Para cada una de las funciones siguientes calcula el valor máximo y el valor mínimo en los intervalos que se indican:

a) $f(x)=(x^2-1)(x^2+3)$ en $[-2,2]$; b) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ en $[-1,3]$; c) $f(x)=x+\text{sen } x$ en $[0,2]$.

(Hespérides, p. 323).

e5: Determina los máximos y mínimos locales en la función $f(x)=\sqrt{x(x-1)(x-2)}$
(Hespérides, p. 323).

En el libro de Edebé tenemos los siguientes ejercicios relativos al cálculo de máximos y mínimos y a la representación gráfica de funciones en los que intervienen puntos extremos.

e6: Estudia los extremos relativos de la función $f(x)=2x^3-3x^2$. (Edebé, p. 275).

e7: Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la función $f(x)=x^4-6x^2$. (Edebé, p. 279).

e8: Halla los puntos de inflexión de la función $f(x)=x^6+2$. (Edebé, p. 279).

e9: Determina los intervalos de monotonía y los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$$

$$f(x)=\frac{4}{x}+\ln x^2$$

$$f(x)=\sqrt{3-x}$$

(Edebé, p. 296).

e10: Halla los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$f(x)=2x^2+\ln x$$

$$f(x)=(x+1)^5$$

(Edebé, p. 296).

e11: Representa la gráfica de $f(x)=(x+2)^2(x-1)$ y determina los intervalos de monotonía, los extremos relativos y los intervalos de curvatura. (Edebé, p. 296).

e12: Sea la función $f(x)=|x^2-4|$. Resuelve los apartados siguientes:

¿En qué puntos es derivable y en cuáles no lo es?

Determina la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos.

Representa su gráfica.

(Edebé, p. 296).

e13: Halla las funciones polinómicas ax^3+bx^2+cx+d cuya derivada segunda sea $x-1$ ¿cuál o cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $(4, -\frac{1}{3})$. (Edebé, p. 296)

El último problema también es del mismo tipo ya que se da la expresión generalizada de la función que se busca para indicar que lo que hay que encontrar son los coeficientes de las potencias de la variable independiente y se da también la expresión algebraica de la derivada segunda. Esto permite calcular una familia de funciones de la que hay que entresacar la que tiene el mínimo indicado.

En el libro de SM tenemos los siguientes tipos de funciones:

e14: Hallar los posibles puntos extremos de $f(x)=x^4-2x^2$ (SM, p. 320)

e15: ¿De qué tipo son los posibles puntos extremos de $f(x)=x^4-2x^2$ (SM, p. 321).

e16: Estudiar la monotonía (crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos) de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = (x-1)e^x$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = x \log x$

e) $f(x) = x \log^2 x$

f) $f(x) = x^2 \log x$

(SM, p. 324).

e17: Obtener los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 9}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3}$

c) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{e^x}$

(SM, p. 324).

e18: Estudiar el crecimiento de

$f(x)=e^x(\cos x + \sin x)$

y determinar los máximos y mínimos para $x \in [0, 2\pi]$. (SM, p. 324).

e19: Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión, si los tiene, de la función

$y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ (SM, p. 324).

e20: Estudiar la curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión) de la función $f(x)=3x+(x+2)^{3/5}$. (SM, p. 324).

e21: Dada la curva $f(x)=\frac{2}{x} + L(x^2)$

Buscar el punto M de la curva en el que la tangente es paralela al eje de abscisas.

Buscar el punto de inflexión I.

Calcular el área del triángulo que tiene por vértices los puntos, M, I y la intersección J de las tangentes a la curva en los puntos M e I. (SM, p. 324)

e22: Sea $f(x)$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b \sin x & x > 0 \end{cases}$$

hallar a y b para que f sea continua y derivable en el punto $x=0$. Para los anteriores valores de a y b , analizar si $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=0$. (SM, p. 324).

e23: Calcular las ecuaciones de las tangentes a la curva $f(x)=x^3-3x^2+2$ en los puntos de inflexión, (SM, p. 324).

También se incluyen problemas en los que, a partir de una familia de funciones, se pide calcular una que cumpla ciertas condiciones relativas a máximos y mínimos. Todos los problemas de este tipo se refieren a funciones cúbicas, salvo la última que es una función racional. La razón de utilizar este tipo de funciones es que son las de menor grado que tienen máximos, mínimos y puntos de inflexión. El método de solución de todos estos problemas es de tipo algebraico más que analítico.

e24: Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+5$, hallar el valor de a para que tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando $x=2$. Encontrar, en este caso, todos los extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de inflexión. (SM, p. 324).

Por inusual, debemos destacar el siguiente problema, que está incluido en este libro que estamos analizando:

e25: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 2 \\ 1+x^2 & 1 & 2 \\ 1+x^3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

Desarrollar su determinante asociado.

Se tiene la sospecha de que $\det(A)$, que evidentemente es una función de x , tiene un máximo y un mínimo relativo. Comprobar este hecho y, en caso afirmativo, hallarlos. En caso negativo, calcular también los posibles máximos y mínimos que aparezcan. (SM, p. 324).

Aunque resulte extraño el incluir una matriz en un problema de tipo analítico, en realidad se trata de un problema del que se obtiene una función polinómica cúbica. Al haber estudiado los alumnos este tipo de objeto matemático con anterioridad, les puede servir de repaso, o para ver aplicaciones diferentes de las usuales, aunque se reduzca a un problema de aplicación de las reglas sobre máximos y mínimos.

Entre las expresiones simbólicas que aparecen en los ejercicios de tipo más rutinario, hemos encontrado las siguientes:

4.4.5.1.- Expresiones algebraicas polinómicas

- Cúbicas:

e26: $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ (Hespérides, p.322)

$f(x)=2x^3-3x^2$ (Edebé p. 296)

$f(x)=x^3-3x^2+2$ (SM, p. 324)

- Cuárticas.

e27: $f(x)=x^4-6x^2$; $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$ (Edebé, p.)

$f(x)=x^4-2x^2$ (SM, p. 320)

- Quínticas:

e28: $f(x)=(x+1)^5$ (Edebé, p.296)

- De grado seis.

e29: $f(x)=x^6+2$ (Edebé, p. 296)

4.4.5.2.- Expresiones algebraicas polinómicas factorizadas

e30: $f(x)=(x^2-1)(x^2+3)$ (Hespérides, p. 323)

$f(x)=(x+2)^2(x-1)$. (Edebé, p. 296)

4.4.5.3.- Expresiones algebraicas racionales

e31: $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; $f(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$; $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. (Hespérides, p.323)

$f(x)=x+\frac{1}{x^2}$ $f(x)=\frac{x}{x^2-6x+9}$; $y=\frac{x^2}{x^2-9}$ (SM, p.324).

4.4.5.4.- Expresiones algebraicas irracionales.

e32: $f(x)=x\sqrt{x+3}$; $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$; $f(x)=\sqrt{x(x-1)(x-2)}$. (Hespérides, p.323)

$f(x)=\sqrt{3-x}$ (Edebé, p.296)

$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$; $f(x)=3x+(x+2)^{3/5}$ (SM, p.324)

4.4.5.5.- Expresiones trascendentes exponenciales,

$$\text{e33: } f(x) = \frac{xe^x}{1+x} \text{ y } f(x) = xe^x. \text{ (Hespérides, p.323)}$$

$$f(x) = (x-1)e^x; \quad f(x) = e^{-x^2}; \quad f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{e^x} \text{ (SM, p.324)}$$

4.4.5.6.- Expresiones trascendentes logarítmicas,

Como en el caso anterior son producto o composición de otras funciones, entre ellas tenemos

$$\text{e34: } f(x) = \frac{\ln x}{x}; \quad f(x) = x^2 \ln x; \quad f(x) = \ln(x+1) - \ln x; \quad f(x) = \ln \frac{x}{x^2 + 1} \text{ (Hespérides, p.323)}$$

$$f(x) = \frac{4}{x} + \ln x^2; \quad f(x) = 2x^2 + \ln x. \text{ (Edebé, p. 297)}$$

$$f(x) = x \log x; \quad f(x) = x \log^2 x; \quad f(x) = x^2 \log x; \quad f(x) = \frac{2}{x} + L(x^2). \text{ (SM, p. 324)}$$

4.4.5.7.- Expresiones trascendentes trigonométricas:

$$\text{e35: } f(x) = |\sin x|; \quad f(x) = \cos |x|; \quad f(x) = \sin x - \cos x; \quad f(x) = x + \sin x. \text{ (Hespérides, p.323)}$$

$$f(x) = e^x (\cos x + \sin x) \text{ (SM, p. 324)}$$

4.4.5.8.- Expresiones de funciones especiales.

Este es el caso de la siguiente función no derivable.

$$\text{e36: } f(x) = |x^2 - 4| \text{ (Edebé, p. 297)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \sin x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b \sin x > 0 \end{cases} \text{ (SM, p. 324)}$$

Este tipo de funciones ya se habían incluido en algunos libros de la etapa anterior, aunque no son habituales para el cálculo de puntos extremos.

Unidades de información	Hespérides				Edebé				SM			
	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC	SI	SE	PD	SC
e1, e2, e3	T5	T10	T15	T20								
e4, e5, e30, e31	T5	C10	T15	T20								
e6, e7, e8, e9, e27, e29					T5	T10	T15	T20				
e10, e11, e12, e28					T5	C10	T15	T20				
e13					E5	T10	T15	T20				
e14, e15, e16, e17, e18, e20, e21, e23									T5	T10	T15	T20
e19									T5	C10	T15	T20
e22									E5	C10	T15	T20
e24									E5	T10	T15	T20
e25									T5	T10	T15	C20
e26, e32, e34	T5	T10	T15	T20	T5	T10	T15	T20	T5	T10	T15	T20
e33	T5	T10	T15	T20					T5	T10	T15	T20
e35	T5	C10	T15	C20					T5	C10	T15	C20
e36					T5	T10	E15	C20	T5	E10	E15	C20
Carácter	T	T/C	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Tabla 4.4.4: Expresiones simbólicas de los libros del periodo 95-01.

4.4.6.- PERFILES

4.4.6.1.- Perfil de Hespérides.

En libro de Hespérides se tratan todos los conceptos pertenecientes al currículo, aunque se concede poca importancia a la intuición, desarrollando, en cambio, una fuerte formalización en definiciones y teoremas. Los problemas se resuelven siguiendo algunos de los pasos establecidos por Polya pero no se hacen interpretaciones de los resultados obtenidos ni se plantean problemas que supongan un verdadero reto a los alumnos. Se puede considerar que la adaptación al currículo es aceptable pero no hay ninguna influencia de las corrientes didácticas actuales, por lo que es de corte tradicional. En los problemas se hace alguna referencia a la sociedad actual, como es el caso de los de tipo económico, especialmente el que se refiere a una empresa de fabricación de ordenadores, y el que nos sitúa en un campo de fútbol. Pero también se dan situaciones de tipo más tradicional, incluyendo problemas de corte clásico o utilizando como unidad monetaria la peseta.

Entre los términos usados hay pocos de carácter intuitivo, en las definiciones se han incluido adverbios como mayor o menor, pero en general, hay una fuerte formalización en la expresión algebraica de funciones, siendo la más llamativa la que se refiere a las medidas de una cierta magnitud. Entre las expresiones utilizadas en relación con las funciones, aunque se utilizan algunas funciones distintas de las algebraicas, no hay, por ejemplo, funciones definidas a trozos u otras similares. La estructura de los enunciados de los problemas es totalmente rigurosa y clásica sin que haya lugar a la interpretación, la presentación de una situación desarrollada,... Prácticamente no hay interacción entre los distintos tipos de representaciones salvo algún esquema que se ha dibujado para representar el enunciado de algún problema.

Se incluyen contextos referidos a algunas áreas distintas de las matemáticas aunque, comparativamente, en menor número que aquellos que se refieren exclusivamente a ámbitos propios de las matemáticas. Se hace referencia a contextos económicos, físicos o de naturaleza cotidiana. Dentro de las matemáticas prácticamente sólo se hace hincapié en los propios conceptos del análisis, aunque se integran otras áreas como aritmética, geometría euclídea, geometría cartesiana y trigonometría, y por primera vez se plantea un problema de tipo estadístico. A pesar de ello, las soluciones que se obtienen en los problemas son de tipo algorítmico.

Las presentaciones de los conceptos, problemas, definiciones, etc. es totalmente estática, los problemas son de tipo escolar, ya hemos señalado por ejemplo lo inadecuado de algunas medidas, la incorporación de algunas funciones de forma artificial en un contexto de tipo económico... No hay ni siquiera referencia a medios informáticos o de las nuevas tecnologías. La aplicación de los conceptos relativos a puntos extremos se lleva a cabo, tanto en problemas de optimización como en ejercicios de representación gráfica de funciones.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema		*	
	Descripciones teóricas		*	
	Símbolos utilizados en las tablas		*	
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología	*	*	
	Tipos de descripciones		*	
	Tipos de tablas			*
	Tipos de gráficas		*	*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	*
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*		
	Papel de las definiciones		*	
	Actividades relacionadas con las tablas		*	
	Actividades gráficas	*		
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum	*		
	Influencias didácticas		*	
	Aplicación de las tablas		*	
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.4.5: Perfil del libro de Hespérides

El libro de Hespérides es de carácter **tecnológico**, destaca la gran cantidad de ejercicios propuestos para practicar las reglas que se han expuesto, y para las que se ha utilizado una formulación de carácter abstracto-formal, que contribuye a forjar el carácter rígido y estático que posee este texto. El tipo de expresiones utilizadas no están enfocadas hacia la comprensión de los conceptos sino, como hemos dicho, hacia su utilización y por ello resulta realmente anacrónico el libro en relación con el enfoque de los planes oficiales.

4.4.6.2.- *Pefil de Edebé*

El libro de Edebé contiene algunos de los elementos especificados en el currículo, se hace énfasis en la resolución de problemas aunque el tipo de definiciones de los conceptos es muy formal sin dejar lugar a la intuición, se presentan aplicaciones a ámbitos científicos, sociales y económicos. Los problemas se resuelven siguiendo algunos de los pasos establecidos por Polya al igual que en el libro anterior: lectura, planteamiento y cálculos, aunque no se incluye la última de las fases, es decir, la interpretación y reflexión acerca de los resultados. También se incorporan distintos tipos de representación de funciones para observar y distinguir las diferentes propiedades que poseen. Resulta un libro bastante actual, al haber incorporado ya la unidad monetaria, que entrará en vigor en el año 2002 en los enunciados de los problemas y por el tipo de problemas que se plantean: una estatua colocada en los jardines de un museo, apartamentos alquilados,...

Los términos que se usan en las definiciones son bastante abstractos, siendo muy habitual la utilización de símbolos matemáticos lógicos y relacionales. Se manejan distintos tipos de funciones y, aunque predominan las polinómicas, aparecen aisladamente otro tipo de funciones incluso, alguna de ellas relacionada con el valor absoluto. La estructura de los enunciados es muy tradicional, siendo muy frecuentes las expresiones del tipo “Si...entonces...”. Se trabaja simultáneamente con diferentes tipos de representación, tanto en los casos concretos como en los más teóricos. Así, para una función particular, además de proporcionar su expresión algebraica, se incluye su gráfica y algunas veces se estudia su tabla de valores o bien algún cuadro de variación relacionado con ella.

Se puede considerar que hay un equilibrio entre los diferentes tipos de problemas propuestos matemáticos y no matemáticos, aunque se echa de menos alguno de ellos como los relacionados con la Física. Dentro de los conceptos matemáticos no hay referencias a otros conceptos que no estén relacionados con el propio Análisis, la Aritmética, la Geometría Euclidea y la Cartesiana. Las interpretaciones que se hacen de los resultados son fundamentalmente cuantitativas y las conclusiones son algorítmicas.

La presentación del contenido se hace de forma absolutamente estática, los problemas aunque son escolares se han adaptado los datos y contextos para darles una apariencia real. Se utilizan multitud de recursos relativos a la imagen y la impresión como: imágenes, gráficas en cuadrículas, una gran profusión del color, márgenes con notas y gráficos explicativos, fotografías e informaciones históricas acerca de los conceptos. Las aplicaciones se refieren tanto a la optimización como a la representación gráfica de funciones.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema		*	
	Descripciones teóricas		*	
	Símbolos utilizados en las tablas			*
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología	*	*	
	Tipos de descripciones		*	
	Tipos de tablas		*	
	Tipos de gráficas			*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*		
	Papel de las definiciones	*		
	Actividades relacionadas con las tablas		*	
	Actividades gráficas	*		
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum	*		
	Influencias didácticas		*	
	Aplicación de las tablas		*	*
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.4.6: Perfil del libro de Edebé

El carácter **tecnológico** del libro queda matizado por la estructura más expositiva de las definiciones y por las continuas referencias a la sociedad del momento, siendo llamativo el recurso al euro y a otras características propias de la sociedad del momento.

4.4.6.3.- Perfil de SM.

El libro de SM se adapta al currículo (Programa oficial), de forma que se apoya en las intuiciones para definir formalmente los conceptos, se hace énfasis en la resolución de problemas, hay referencias al uso de las nuevas tecnologías, se presentan algunos teoremas en aras de una mayor formación teórica,.. Hay bastante influencia de las nuevas corrientes epistemológico-didácticas que dan lugar a: referencias al contexto histórico y cultural en el que han surgido y se han desarrollado los conceptos matemáticos, incluyendo biografías de matemáticos, para contextualizar y justificar dichos conceptos, numerosas gráficas y esquemas que sirven de apoyo intuitivo a los conceptos, situaciones pertenecientes a ámbitos muy diversos e introducción de las nuevas tecnologías, principalmente calculadoras gráficas. Hay algunas referencias a la sociedad del momento en los enunciados de los problemas: latas de cerveza, envases, lata de conservas, depreciación del valor de una piedra preciosa.

Junto al uso de términos formales, también se utilizan algunos más intuitivos fundamentalmente en la introducción de las definiciones. Hay un equilibrio en el tipo de funciones consideradas de tal forma que, prácticamente hay alguna de cada tipo, añadiéndose funciones definidas a trozos y otras en las que simplemente se da una descripción verbal de sus características. Se incluye algún enunciado de tipo explicativo

pero la mayoría son estándar. Hay diferentes tipos de representación, de forma que se pueda obtener una imagen del concepto ajustada a las diferentes posibilidades.

El tipo de situaciones está equilibrado entre diferentes áreas, incluyendo contextos de tipo económico, cotidiano, y situaciones de tipo matemático. Entre estas últimas también hay una gran diversidad de forma que, además de contenidos aritméticos o geométricos, se incluyen otros, como es el caso de las matrices. Aunque la mayoría de las interpretaciones son cuantitativas, se incluyen otras de tipo cualitativo, como analizar el tipo de envase que resulta según las dimensiones obtenidas. También en las definiciones se buscan ejemplos y contraejemplos para interpretar las conclusiones.

La presentación de los contenidos se hace de forma estática aunque hay algunos atisbos de introducción de dinamismo, por ejemplo, en la gráfica del problema de los botes de cerveza, para estudiar cómo varía la altura en función de diámetro para un volumen fijo. Los problemas son fundamentalmente escolares, aunque en algunos los datos están adaptados respecto de una hipotética situación real. Hay una gran utilización de herramientas de impresión como el color, la diversidad de gráficos y tablas, la incorporación de fotografías y esquemas, la utilización de márgenes explicativos,... Existe un equilibrio entre los problemas de optimización y los ejercicios de representación gráfica de funciones.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema		*	
	Descripciones teóricas		*	
	Símbolos utilizados en las tablas	*		
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología	*		
	Tipos de descripciones		*	
	Tipos de tablas	*		
	Tipos de gráficas			*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios	*		
	Papel de las definiciones	*	*	
	Actividades relacionadas con las tablas	*		
	Actividades gráficas			*
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum	*		
	Influencias didácticas		*	
	Aplicación de las tablas	*		
	Presentación de las gráficas			*
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

Tabla 4.4.7: Perfil del libro de SM

El libro de SM es de carácter **expositivo-tecnológico**, tiene una gran cantidad de ejercicios de aplicación para practicar tanto las reglas como los conceptos descritos, y se compensa su carácter rutinario con la alusión a la sociedad del momento y al planteamiento de algunas situaciones de carácter comprensivo que ayudan a dotar de cierta agilidad al

libro. Es de destacar la inclusión, mediante imágenes de algunos medios tecnológicos modernos.

4.5.- CONCLUSIONES.

Las conclusiones las elaboraremos, en primer lugar de cada uno de los periodos en los que hemos dividido la enseñanza del Análisis Matemático en la educación secundaria en España, para establecer unas conclusiones finales a modo de comparación entre los resultados de cada uno de los periodos.

Primer periodo: 34-67

- Al ser este el primer periodo en la enseñanza del Análisis Matemático en la educación secundaria en España, no tenemos ningún otro modelo con el que podamos compararlo, y marcará la pauta de comparación del resto de los periodos. Introducir los conceptos de esta rama de las matemáticas en la enseñanza secundaria constituye un hito en cuanto a la consideración que los nuevos programas van a tener en relación con ellas, de tal forma que, se considera necesaria la incorporación de conceptos de matemáticas superiores en la preparación de los estudiantes que posteriormente ingresarán en las universidades, sobre todo en las carreras técnicas, y que necesitarán este tipo de conceptos. Se incluyen en los últimos cursos del Bachillerato, junto con otras ramas de las matemáticas, como la geometría analítica y los números complejos, siendo su carácter fundamentalmente formativo y son de carácter obligatorio para todos los alumnos, destacando así la importancia que se les concede.
- La estructura de los libros evoluciona a lo largo de este periodo desde el de Fernández y Jiménez de tipo enciclopédico, hasta los libros de Baratech y Royo, y Carranza con una organización para un solo curso, dividida en lecciones que es más actual y en los que al final de cada capítulo se incluye una colección de ejercicios o problemas para practicar los conocimientos adquiridos a lo largo de cada lección de forma similar a los libros actuales.
- En estos libros también se observa una evolución en el lenguaje matemático que todavía no es el definitivo, en Fernández y Jiménez no se considera el concepto de función, sino que se desarrolla todo el Análisis Matemático a partir del concepto de variable, y se manejan términos típicos de este lenguaje como el relativo a los infinitésimos. Poco a poco, a medida que va avanzando el periodo, el concepto de función va adquiriendo un papel que culminará en el siguiente periodo.
- Los fenómenos seleccionados para trabajar los puntos críticos son típicos del periodo, destacando en comparación con los demás, la inclusión de numerosos problemas y ejercicios relacionados con conceptos propios de Física, como la luminosidad, la elasticidad, la velocidad,... y con herramientas, como palancas. También forman un capítulo importante, los problemas de carácter geométrico, dada la entidad que tenía la Geometría en la enseñanza en la época que nos ocupa en relación con otras épocas más

actuales. Muchos problemas planteados son de tipo genérico asociados a toda una familia de funciones, heredando la forma de hacer de los matemáticos clásicos.

- En cuanto a las definiciones y descripciones más teóricas, destaca la incorporación de algunos símbolos matemáticos como los relativos a las funciones, los símbolos relacionales $>$, $<$, algunas letras griegas como ε , Δ , la utilización de subíndices y superíndices,... Dichas definiciones descansan en el aspecto gráfico de las funciones, haciéndose continuas las referencias a la curva que representa gráficamente la función.
- Las tablas son muy escasas y su uso se reduce a ser meros auxiliares para la representación gráfica de las funciones.
- Las gráficas también son escasas, mediante una única gráfica se representan todas las posibilidades en relación con los puntos críticos, presentándose no sólo los casos que se corresponden con las funciones derivables, sino también aquellas que no lo son.
- Las expresiones simbólicas son casi todas algebraicas, siendo las más numerosas las polinómicas. En algunas expresiones se utilizan en lugar de los símbolos x e y para las variables, e y t destacando la importancia y la aplicación de los conceptos del Análisis Matemático en relación con la física.

Segundo periodo: 67-75.

- Este periodo está marcado por la introducción de la matemática moderna, que en lo que se refiere al Análisis introducirá el lenguaje y la estructura típica de la topología, por lo que son corrientes términos como entorno, máximo (mínimo) relativo (absoluto), así como el empeño en la exactitud en el lenguaje, y en la estructura axiomática de los temas. El concepto de función tiene entidad propia a lo largo de este periodo, de forma que es un objeto de estudio y dada la orientación de los programas de este periodo se les dota de una estructura algebraica.
- La estructura de los libros es la heredada de la época anterior, en la que los cursos se dividen en lecciones dedicadas a cada uno de los conceptos matemáticos desarrollados. La más novedosa es la del libro de SM que resulta precursora respecto del siguiente periodo, dotando a los libros de un carácter más escolar-didáctico, incluyendo explicaciones exhaustivas de cada uno de los conceptos que se describen.
- El libro de Edelvives, continua incluyendo problemas relativos tanto a la Física como a la Geometría tan característicos de la época anterior, pero los otros libros plantean situaciones bastante más abstractas, de forma que hasta los problemas que hemos clasificado dentro del apartado de situaciones cotidianas, son adaptaciones hechas de problemas típicamente geométricos, para los que se ha buscado un contexto que sirviera de pretexto. Existe una ausencia importante en cuanto a los problemas que plantean situaciones generales, siendo más habituales los problemas numéricos específicos.
- Las definiciones de los puntos críticos están más asociadas al valor de la función que a una determinada posición en su gráfica, y las reglas para su cálculo son de tipo

algorítmico, estableciéndose pasos sucesivos algunos de los cuáles equivalen a la resolución de una ecuación algebraica. La influencia de la matemática moderna tanto en las definiciones como en las reglas, es clara.

- Las tablas como en el periodo anterior, son escasas y ligadas a la representación gráfica de funciones. Destaca que no haya ninguna en el texto piloto y que en las incluidas en el libro de SM, se empiezan a incorporar algunos símbolos extramatemáticos como flechas.
- En este periodo se empiezan a utilizar las gráficas que hemos llamado mensajes topológicos, en consonancia con el tipo de matemáticas que se están desarrollando y la importancia concedida a la topología.
- Las expresiones simbólicas son casi todas algebraicas. Hay una gran ausencia en relación con funciones no derivables, funciones definidas a trozos, y funciones de tipo más general que si estaban incluidas en los libros del periodo anterior.

Tercer periodo: 75-95.

- Durante este periodo los conceptos del Análisis Matemático se incorporan a cursos inferiores respecto de los periodos anteriores, ya que se considera que su introducción ha de ser más progresiva, debe empezar antes e ir de forma cíclica completándose los contenidos. Se mantiene la herencia del periodo anterior, de forma que se puede decir que la matemática moderna sigue prevaleciendo a lo largo de la mayor parte de este periodo, salvo casos aislados como el libro del Grupo Cero y los últimos años, en los que los libros incorporan ciertos elementos novedosos como un intento de aplicación de la llamada corriente de “resolución de problemas”, la inclusión de notas históricas, anécdotas, curiosidades matemáticas, problemas de ingenio y entretenimiento, numerosas imágenes relacionadas con los conceptos de cada tema,...
- Este periodo se corresponde con un boom editorial muy importante, y aunque nos hemos restringido a una muestra muy reducida de libros, hemos procurado que estuvieran representadas la mayor parte de las opciones existentes en el mercado. La estructura de los libros es típica de la enseñanza secundaria. Están divididos en bloques de contenidos en los que se desarrollan diferentes temas según los conceptos a enseñar-aprender, se incorporan explicaciones detalladas, ejemplos relacionados con los conceptos, numerosos ejercicios resueltos y propuestos,...
- Hay una mayor cantidad de ejercicios y problemas, doblándose la cantidad respecto del periodo anterior. Además de los problemas clásicos que aparecen en todos los periodos, se incluyen algunos contextos novedosos como los relativos a los contextos económicos y estadísticos, y la incorporación de algunos ejercicios en los que la gran protagonista es la geometría cartesiana y los objetos de dicha geometría, utilizados bajo una formulación estrictamente algebraica. Por su peculiaridad destaca el libro del Grupo Cero, en el que la formulación y resolución de problemas es totalmente diferente del resto. Se busca más la comprensión y la justificación de los conceptos que la aplicación rutinaria de ciertas reglas aprendidas de memoria.

- En las definiciones se incorporan multitud de símbolos lógico-matemáticos, realizándose, en algunos casos, una traducción paralela entre el lenguaje habitual y el lógico-matemático, con lo que destaca su alto grado de abstracción. Dentro del grupo de libros analizados hay que entresacar el del Grupo Cero, en el que las definiciones se establecen a posteriori respecto de las explicaciones y ejemplos, y el de Anaya del 88 por la introducción de algunos términos intuitivos. Los puntos críticos se definen como puntos de funciones que cumplen unas determinadas condiciones, resultando bastante similar al periodo anterior.
- Las tablas son muy numerosas, utilizándose exclusivamente para representar gráficamente funciones, aunque en el libro del Grupo Cero, tienen entidad propia.
- Las gráficas son numerosas, incluyéndose no sólo los casos correspondientes a funciones derivables, sino también algunas que no los son. Se utilizan diferentes tipos de gráficas aunque destacan por su importancia los mensajes topológicos que se mantienen desde su incorporación en la etapa anterior. En los libros del Grupo Cero y de Anaya 88, se incluyen numerosos ideogramas para la creación de una imagen visual, como medio de identificación de los conceptos.
- Entre las expresiones simbólicas, destacan las de tipo algebraico. En el libro del Grupo Cero se incluyen problemas en los que se relacionan las expresiones simbólicas con la descripción de algunas características gráficas de la función, con lo cual se intenta englobar varias representaciones en una misma actividad.

Cuarto periodo:95-01

- El periodo que nos ocupa está en pleno funcionamiento actualmente, por lo que resulta difícil establecer unas características claramente identificativas de los libros escritos para la L.O.G.S.E., hemos de tener en cuenta, además que hasta el año 2001 no ha sido generalizada la implantación en todos los institutos de enseñanza media de este plan de estudios. Pero podemos adelantar que a pesar de las orientaciones establecidas en los programas oficiales, no han tenido un claro reflejo en el material curricular editado al efecto, de tal forma que la importancia concedida a la heurística, la resolución de problemas, la aplicación de las matemáticas a distintos ámbitos de la vida, y el apoyo a la intuición, no se corresponden con las formulaciones que aparecen en los libros de texto analizados. El resultado ha sido la aparición de libros de texto muy voluminosos donde los conceptos están condensados en pocas palabras, y en los que la actividad del alumno no se diferencia mucho de la llevada a cabo en periodos anteriores.
- La estructura de los libros es similar a la de los libros del periodo anterior, aunque hay una mayor profusión de imágenes, colores,, recuadros, síntesis,...
- Los tipos de problemas y su cantidad han aumentado considerablemente. Así, además de los clásicos, tenemos numerosos problemas que incluyen situaciones cotidianas, en los que se complican el tipo de formas geométricas a las que se hace referencia, son escasos, pero hay algún problema relacionado con la Física, se mantienen los que se refieren a los contextos económicos, y aumentan considerablemente los que se refieren

a fenómenos matemáticos, recuperándose los problemas de tipo general que se describieron en el primer periodo e introduciéndose problemas de tipo gráfico, en los que hay que analizar la gráfica de una función o de su función derivada para calcular los puntos críticos.

- La definición que se establece de los puntos críticos se hace más bien a partir de la regla para calcularlos (anulación de la primera o de la segunda derivada), que a partir de una propiedad de la función o un comportamiento de la curva que la representa gráficamente. Se mantienen algunos símbolos lógico-matemáticos, pero se reduce considerablemente su uso.
- Hay numerosas tablas, pero siguen manteniendo una posición secundaria respecto del resto de las representaciones utilizadas. Se han modernizado, al igual que los libros, incorporando el color, y una maquetación de tipo más actual, pero su papel sigue siendo muy reducido.
- En cuanto a las gráficas, se introducen muchas características “escolares” como la utilización del color, de cuadrículas, flechas,... Su papel no sólo corresponde a la visualización de las propiedades y a la construcción de imágenes visuales de los conceptos, sino que también se trata la clasificación de los puntos según sus posibilidades dentro de la gráfica.
- Se introducen algunas descripciones de funciones con el fin de averiguar su expresión simbólica, aunque la mayoría de los ejercicios son de tipo rutinario para encontrar los puntos extremos de una función normalmente polinómica. El único caso excepcional se refiere a una función determinada a partir de un determinante en el libro de SM.
- Aunque en los periodos anteriores, las relaciones entre representaciones estaban relegadas a la traducción de una descripción a una expresión simbólica, de ésta a la tabular y finalmente a la gráfica, podemos considerar que algunas de las características expuestas respecto de este periodo, nos hacen pensar que en estos libros se está intentando establecer otros tipos de representaciones, como pasar de la descripción a la gráfica directamente, o de la gráfica a la expresión simbólica, pero este tipo de situaciones son todavía muy escasas y no están sistematizadas.

En cuanto a la enseñanza de los puntos críticos en la educación secundaria en España.

- Se ha producido un aumento progresivo de cada uno de los periodos al siguiente, tanto en el número de problemas como en el tipo de los problemas, destacando los problemas físicos en el primer periodo, los matemáticos en el segundo, los económicos en el tercero y los gráficos en el último. La mayoría son problemas numéricos y son escasos salvo en algún periodo, los problemas más generales que conciernen a toda una familia de funciones.
- En relación con las gráficas, destaca su papel en la visualización de los conceptos, pero también en relación con la clasificación de éstos. Por ello, el carácter que se dota a los

conceptos del Análisis Matemático es fundamentalmente estático, al establecerse exclusivamente el resultado final.

- A ese mismo carácter contribuyen la mayoría de las definiciones al identificar los puntos críticos con un punto de una curva, sin hacer referencia a la variación asociada a una función. Las definiciones se pueden clasificar en: funcionales, cuando se dice que, por ejemplo, el máximo es el mayor valor de la función; reglas, cuando se dice que su derivada es de ser cero, o gráficas, cuando hacen referencia a un punto, propiedad o comportamiento de una curva.
- A pesar de las variaciones en cada uno de los libros, lo que no ha variado grandemente es el tipo de actividad que se espera del alumno, destacando la aplicación rutinaria de las reglas a ejercicios-tipo o esclares.
- Esto mismo se refleja en los perfiles de los libros, en los que hay el mismo número de expositivos y tecnológicos, sin que esto dependa del periodo al que corresponden. Esto hace pensar que el énfasis en los libros de texto, está puesto o bien en la exposición de los conceptos de una forma rigurosa o bien en la adquisición de ciertas destrezas y habilidades calculísticas, sin que hayan influido claramente las nuevas corrientes en Didáctica de las Matemáticas sobre todo en los libros actuales. Destaca, en este sentido, el libro del grupo Cero, por no adaptarse a las mismas características que el resto de los libros, y podemos considerar que ha tenido una escasa influencia en el resto de los libros, dado que no hay ninguno escrito con posterioridad que se acerque a sus formulaciones.
- De las consideraciones anteriores podemos también concluir que el tipo de orientación de los libros no depende de los planes de estudio en los que se encuadre, sobre todo en relación con los libros del último periodo, puesto que hemos visto que no se reflejan en las nuevas orientaciones dictadas por el Ministerio de Educación, mas que de una forma muy leve. Son los propios libros de texto los que establecen el tipo de actividad que debe ejercer el alumno, y la forma en que se estructuran los conceptos matemáticos. Creemos, sin embargo, que el libro de texto debe ser sólo un material auxiliar de apoyo en la enseñanza que se complemente tanto con otros libros de texto, libros de otro carácter, así como material diverso, tanto didáctico como fungible, audiovisual u otro.
- Hemos desarrollado un instrumento de análisis efectivo de los libros de texto, para a partir de él establecer un perfil que caracterice e identifique dichos libros. De forma similar a cómo se ha hecho para los libros escogidos, se puede hacer para cualquier otro libro o concepto matemático adaptando las categorías a dicho concepto.

